REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et applications

Thème

Problème inverse pour une équation de diffusion-onde fractionnaire

---

Présentée par :
Melle *ALLAOUI* Nour Elhouda

Soutenu publiquement le :01 /07/2019.

Devant le jury composé de :

Président :	Mr *BENABERRAHMANE* Benyattou	Prof.,	Université de M'sila
Encadreur :	Mr *NOUIRI* Brahim	M.C.A,	Université de M'sila
Co-Encadreur :	Mme *DJERIOUI* Khayra	M.A.A,	Université de M'sila
Examinateur :	Mr *FERAHTIA* Nassim	M.A.A,	Université de M'sila

Année universitaire 2018/2019

Remerciements

Au NOM D'ALLAH LE CLÉMENT ET LE MISERICORDIEUX.
Je tiens tout d'abord á remercier **Dieu** le tout Puissant
qui ma donné le courage et la persévérance pour la réalisation
de ce modeste mémoire. Je remercie profondément Monsieur
NOUIRI Brahim mon encadreur, qui m'a beaucoup aidé pour
terminer ce travaille malgré ses nombreuses charges,
il m'a quidé durant mon recherche, et sans oublier ses précieux consiels.
mes remerciements vont aussi aux Madame
DJÉRiOUI Khayra m'a co-encadreur.
Mes sincéres remerciements á á monsieur
BENABERRAHMANE Benyattou, qui ma fait l'honneur d'accepter
de présider le jury de ce mémoire .
Je remercie vivement Monsieur
FERAHTIA Nassim, qu' a accepté d'examiné mon travail .
Je voudrais également remercier tous mes enseignants,
tous mes coulégues de deuxiéme année Master EDP et applications, en particulier
B.Amroune, **A.Saoudi**, je leur souhaite
une bonne continuation
De tous mon cÔur je remercie mes parents,
et mes priéres que Dieu les protége et les accorde santé et longue vie.
Enfin, j'adresse un grand remerciement á mes pére **Sliman** ,
mes oncle et tout ma famille, qui n'ont donné beaucoup de soutien constant
et d'encouragement.

Dédicaces

Je dédie ce modeste mémoire
Á mes trés chérs parents et ma grande mére.
Á mes chéres soeurs :Siham, Amani, Lila, Aziza, Soumia, et Sonya.
Á mes fréres : Yacine et Khalil.
Á mes oncles, et tout les membres de ma famille.
Á mes amis **Soubna** , **Roufida**, **Houda** et **Ahlam**.
Á tous qui m'ont encouragé et soutenu pour arriver á ce niveau d'étude.
Á tout les gents qui m'ont aimé.

NOUR Elhouda

Résumé

ملخص: في هذه المذكرة ، قمنا بدراسة مسألة عكسية لتعيين معامل الانتشار المتعلق بمتغير الفضاء في معادلة الانتشار الكسرية لكابوتو. تم تقديم مخطط ضمني للمسألة المباشرة والذي يعتمد على تقطيع المشتق الجزئي لكابوتو. كما أثبتنا الاستقرار والتقارب لهذا المخطط الضمني باستخدام التحليل المصفوفي، وباستعمال طريقة طوماص قمنا بحساب الحل التقريبي للمسألة المباشرة من خلال مثال عددي. تم إدخال خوارزمية تعتمد على طريقة التربيعات المصغرة مع تنظيم تيخونوف لتحديد معامل الانتشار في فضاء تقريبي مختلف . أظهرت لنا هذه الخوارزمية أنها فعالة على الأقل في هذه المسألة العكسية عبر مثال عددي.

كلمات مفتاحية: التحليل المصفوفي، استقرار، تقارب، تربيعات مصغرة، طريقة طوماص ، مخطط ضمني، معادلة الانتشار الكسرية، معادلة ناظمية.

Dans ce mémoire, nous avons étudie un problème inverse pour déterminer numériquement un coefficient dépendant de l'espace dans une équation de diffusion-onde fractionnaire. Nous avons présenté un schéma de différence fini implicite pour le problème direct basé sur la discrétisation d'une équation intégro-différentielle équivalente et l'interpolation linéaire de Lagrange. Nous avons prouvé la stabilité et la convergence de ce schéma implicite à l'aide de l'analyse matricielle. Avec la méthode de Thomas, nous avons calculé la solution numérique de problème direct par un exemple numérique. Ensuite, nous avons proposé un algorithme d'inversion basé sur la méthode des moindres carrés avec régularisation d'homotopie pour résoudre le problème inverse . Nous avons donné des exemples numériques pour montrer que l'algorithme d'inversion proposé est efficace et stable.

Mots-Clés : Équation de diffusion-onde fractionnaire, Équation intégro-différentielle, Interpolation linéaire de Lagrange, Moindres carrés, Régularisation d'Homotopie .

In this memoir, we studied an inverse problem to numerically determine a space-dependent coefficient in a fractional diffusion-wave equation. We presented an implicit finite difference scheme for the direct problem based on the discretization of an equivalent integro-differential equation and Lagrange linear interpolation. We proved the stability and convergence of this implicit scheme using matrix analysis. With Thomas's method, we calculated the numerical solution of direct problem by numerical example. Then, we proposed an inversion algorithm based on the least squares method with the Homotopy regularization to solve the inverse problem. We have given numerical examples to show that the proposed inversion algorithm is efficient and stable.

Keywords : Fractional diffusion-wave equation, Integro-differential equation, Linear interpolation of Lagrange, Least squares, Homotopy regularization .

Table des matières

1 Préliminaires sur le calcul fractionnaire **8**
1.1 Fonctions spéciales . . . 9
1.1.1 Fonction Gamma . . . 9
1.1.2 Fonction Bêta . . . 9
1.2 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville . . . 11
1.3 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville . . . 12
1.4 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo . . . 13
1.5 Généralité sur les matrices . . . 15
1.6 Les normes vectorielles et matricielles . . . 16
1.6.1 Normes vectorielles . . . 16
1.6.2 Normes matricielles . . . 17
1.7 Schéma de différences finies . . . 18
1.7.1 Stabilité et convergence . . . 18

2 Problème direct **19**
2.1 Positon du problème . . . 20
2.2 Méthode de différence finie . . . 21
2.2.1 Stabilité et convergence du schéma de différence . . . 27
2.2.2 Algorithme . . . 39
2.2.3 Exemple numérique . . . 40

3 Problème inverse **42**
3.1 Position du problème . . . 43
3.2 Problème de moindres carrés non linéaire . . . 43
3.2.1 Régularisation d'Homotopie . . . 43
3.2.2 problème linéaire . . . 44
3.2.3 Résultat d'existence . . . 46
3.2.4 Résultat d'unicité . . . 47
3.3 Algorithme d'inversion . . . 49
3.4 Inversion numérique . . . 49
3.4.1 Exemple01 :fonction linéaire . . . 49
3.4.2 Exemple02 :fonction de seconde ordre . . . 50

Table des figures

2.1 solution exacte et approché 41

3.1 coefficient de diffusion-onde affine et leur inversion 50
3.2 coefficient de onde quadratique et leur inversion 51

Introduction générale

Les équations fractionnaires en temps ou en espace ont fait l'objet de nombreuses études ces dernières années. Elles présentent de préférence des avantages pour la description de phénomènes de diffusion anormaux dus à la propriété non locale des dérivées d'ordre fractionnaire. Au cours des dernières décennies en particulier, des équations aux dérivées partielles d'ordre fractionnaire ont été utilisées avec succès pour la modélisation des nombreuses phénomènes dans différents domaines d'applications. Par exemple, une diffusion anormale est souvent observée dans des matériaux à mémoire, par exemple des matériaux visco-élastiques, et des milieux hétérogènes, tels que le sol, un aquifère hétérogène et un écoulement de fluide souterrain.

Les littératures sur les théories et les applications des équations différentielles d'ordre fractionnaire sont très complètes, on peut consulter les livres [3, 13]. Les problèmes directs pour les équations fractionnaires ont été étudiés ces dernières années, voir [17, 20, 19, 25, 16, 24]. Les problèmes inverses pour les équations fractionnaires en temps-espace consistent à récupérer des données inconnues à l'aide de données supplémentaires et ont également été étudiées récemment, voir [12, 7, 8, 16, 18].

Dans ce mémoire, nous avons considéré une équation de diffusion-onde fractionnaire en temps dans un domaine borné hétérogène en dimension un donnée par :

$$ {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t), \;\; 0 < x < L, \; 0 < t \leq T, \tag{1} $$

avec les conditions initiales

$$ u(x,0) = \phi(x), \;\; \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x), \;\; 0 \leq x \leq L, \tag{2} $$

et les conditions aux limites de Neumann homogènes

$$ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0, \;\; 0 \leq t \leq T, \tag{3} $$

où $D(x)$ est un coefficient strictement positive décrit l'hétérogénéité du milieu, $\phi(x)$, $\varphi(x)$ sont des fonctions décrites la position et la vitesse initiale respectivement, et $f(x,t)$ est une fonction donnée de terme source, et ${}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(x,t)$ pour tout $1 < \alpha < 2$ désigne la dérivée gauche fractionnaire de Caputo d'ordre α par rapport à t :

$$ {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u(x,s)}{\partial s^2} ds, \;\; 0 < t \leq T, $$

dans laquelle $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma et $T > 0$ est un temps final fixe.

Si toutes les fonctions $D(x)$, $f(x,t)$, $\phi(x)$ et $\varphi(x)$ sont données, le problème de la recherche de $u(x,t)$ à partir de (1)-(3) est appelé problème direct. Cependant, le problème ici est que le coefficient $D(x)$ dans le problème (1)-(3) est inconnu, ce qui doit être déterminé par la condition supplémentaire de Dirichlet en $x = L$:

$$ u(L,t) = \psi(t), \;\; 0 \leq t \leq T, \tag{4} $$

où $\psi(t)$ est une fonction donnée. Le problème (1)-(4) s'appelle problème inverse.

La recherche sur les problèmes inverses de détermination des coefficients de diffusion dépendants de l'espace dans les équations de diffusion fractionnaires fait l'objet de quelques travaux. Cheng et al. [14, 2009] ont considéré un problème inverse de détermination du coefficient de diffusion dépendant de l'espace et de l'ordre fractionnaire dans l'équation de diffusion fractionnaire en temps avec condition initiale informelle, et ils ont prouvé l'unicité de la solution du problème inverse par la méthode de développement en fonctions propres. Li et al. (2013) ont étudié le problème inverse similaire mais avec une condition initiale continue, et ils ont également prouvé l'unicité du problème inverse sur la base du problème inverse des valeurs propres.

D'autre part, inversions numériques pour les coefficients de diffusion, Li et al. [11, 2012] ont utilisé l'algorithme de perturbation optimal pour la détermination du coefficient de diffusion dépendant de l'espace dans l'équation de diffusion fractionnaire en temps, Zhang et al. [6, 2013] ont appliqué l'algorithme de régularisation d'homotopie au problème de l'inversion simultanée consistant à déterminer le coefficient de diffusion et la magnitude de la source également dans l'équation de diffusion fractionnaire en temps, et récemment Ziane A. [2, 2018] à appliqué la méthode des moindres carrés avec régularisation de Tikhonov pour résoudre un problème inverse pour une équation de diffusion fractionnaire en temps définie dans un milieu hétérogène.

À notre connaissance, la recherche sur les problèmes inverses de détermination des coefficients dépendant de l'espace dans les équations de diffusion-onde fractionnaire en temps n'a pas fait l'objet de beaucoup d'attention. Notre objectif dans ce mémoire est de appliquer la technique de régularisation d'homotopie de l'article de Zhang et al [6] sur notre problème inverse (1)-(4).

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de base concernant le calcul fractionnaire, les équations intégro-différentielles de type Volterra. De plus, nous avons donné un rappel sur la méthode des différence finis et l'interpolation linéaire de Lagrange.

Dans le deuxième chapitre, nous avons introduit un schéma de différence implicite pour le problème direct basé sur la discrétisation d'une équation intégro-différentielle équivalente et l'interpolation linéaire de Lagrange, et la stabilité et la convergence de cet schéma sont prouvées en utilisant l'analyse matricielle, et deux exemples numériques sont présentés.

Dans le dernier chapitre, nous avons proposé un algorithme d'inversion basé sur la méthode des moindres carrés avec régularisation d'Homotopie pour résoudre le problème inverse (1)-(4), et des inversions numériques sont effectuées par des exemples numériques pour montrer que l'algorithme d'inversion proposé est efficace et stable.

On termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES SUR LE CALCUL FRACTIONNAIRE

Dans ce chapitre, nous avons parlé par certains théories de base du calcule fractionnaire. Nous donnons des définitions de quelques fonctions spéciales (Gamma, Bêta), ensuite nous présentons les intégrales et les dérivées fractionnaires (au sens de Riemann-Liouville et de Caputo) et ce chapitre contient des définitions élémentaires sur les matrices avec la définition du l'une des méthodes utilisées dans la résolution des équations aux dérivées partielles" la méthode des différences finies " .

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 Fonction Gamma

Définition 1.1. ([13]). On appelle fonction Gamma, la fonction définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt \quad \text{où } \ z \in \mathbb{C} \text{ et } Re(z) > 0.$$

Propriétés 1.1. Nous avons les propriétés suivantes

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(n+1) = (n)! \ \ , n \in \mathbb{N}$.
3. $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!} \ \ , n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.1. La détermination de la fonction Gamma pour les valeur négatifs non entier par la formule $\Gamma(z) = \dfrac{\Gamma(z+1)}{z}$ et la transition d'un intervalle à une autre $(-1, 0), (-2, -1)$....
la fonction Gamma n'existe pas pour les valeur négatifs entiers.

Exemple 1.1. Soit $z = \dfrac{1}{2}$ pour calculer $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ on utilise une changement de variable on pose que $t = \tau^2$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\, dt \\
&= 2\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2}\, d\tau \qquad\qquad \text{(d'après l'intégrale de Gauss)} \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \\
&= \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.2. ([13]). La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour tout complexes z et w par

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\, dt, \ \ Re(z) > 0 \ \text{ et } \ Re(w) > 0.$$

Proposition 1.1. *la relation entre la fonction Gamma et Bêta donnée par*
pour tout $z, w \in \mathbb{C}$ avec $Re(z) > 0$, $Re(w) > 0$ on a

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\,.\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

Démonstration. Soit $D =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}\,dx\right)\left(\int_0^{+\infty} y^{w-1}e^{-y}\,dy\right)\\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^{z-1}y^{w-1}e^{-(x+y)}\,dxdy.\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable suivant

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{x}{x+y}\end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v),\end{cases}$$

et

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ (1-v) & -u\end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u.$$

De même que le domaine D' correspondante à D dans les cordonnées u, v est

$$D' = \{(u,v)/u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\iint_D x^{z-1}y^{w-1}e^{-(x+y)}\,dxdy &= \iint_{D'} (uv)^{z-1}(u(1-v))^{w-1}e^{-u}|-u|\,du\,dv\\ &= \iint_{D'} (u)^{z+w-1}v^{z-1}(1-v)^{w-1}e^{-u}\,du\,dv\\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 (u)^{z+w-1}v^{z-1}(1-v)^{w-1}e^{-u}\,du\,dv\\ &= \left(\int_0^{+\infty}(u)^{z+w-1}e^{-u}\,du\right)\left(\int_0^1 v^{z-1}(1-v)^{w-1}\,dv\right)\\ &= \Gamma(z+w).B(z,w).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\,.\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}.$$

□

Propriétés 1.2.

1. $B(z,w) = B(w,z)$, (symétrique).
2. $B(z,1) = \dfrac{1}{z}$.

1.2 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Soient $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur $\mathbb{R}$ et $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur Ω , nous avons

$$I^1_{a^+} f(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

L'itération de $(I^1_{a^+} f)$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a, De plus on a

$$\begin{aligned} I^2_{a^+} f(x) &= I^1_{a^+}(I^1_{a^+} f(x)) \\ &= \int_a^x I^1_{a^+} f(t)\, dt \\ &= \int_a^x \left(\int_a^t f(s)\, ds \right) dt, \end{aligned}$$

on pose $g(t) = \int_a^t f(s)\, ds$, d'après l'intégrale par partie. Nous avons

$$\begin{aligned} I^2_{a^+} f(x) &= \left[t \int_a^t f(s)\, ds \right]_a^x - \int_a^x t f(t)\, dt \\ &= x \int_a^x f(s)\, ds - \int_a^x t f(t)\, dt \\ &= x \int_a^x f(t)\, dt - \int_a^x t f(t)\, dt \\ &= \int_a^x (x - t) f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Donc, pour n^{eme} itération , on obtient

$$I^n_{a^+} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x - t)^{n-1} f(t)\, dt,$$

cette formule est appelée formule de Cauchy, et d'après la propriété de Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$,$\forall n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$I^n_{a^+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x - t)^{n-1} f(t)\, dt.$$

Définition 1.3. ([3, 23]). Soient $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur $\mathbb{R}$ et $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$
Les intégrales

$$I^\alpha_{a^+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x - t)^{1-\alpha}}\, dt \quad , x > a, Re(\alpha) > 0. \tag{1.1}$$

$$I^\alpha_{b^-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t - x)^{1-\alpha}}\, dt \quad , x < b, Re(\alpha) > 0. \tag{1.2}$$

Sont appelés les intégrales fractionnaires à gauche (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ $(Re(\alpha) > 0)$ respectivement.

Exemple 1.2. Soit $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$ on a

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} \, dt.$$

Avec le changement de variable $t = a + s(x-a)$, nous avons

$$\begin{cases} t = a \Leftrightarrow s = 0, \\ t = x \Leftrightarrow s = 1, \\ dt = (x-a)ds. \end{cases}$$

Donc, avec la définition de la fonction Bêta , on obtient

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} \, ds$$

$$= \frac{B(\beta,\alpha)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta-1}.$$

En utilisant Proposition 1.1 on obtient

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\alpha+\beta-1} .$$

Remarque 1.2. L'intégrale d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est donnée par

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (x-a)^{\alpha} \qquad \text{et} \qquad I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (b-x)^{\alpha},$$

$f(x) = C \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.2. *([23, page34]). Soient $f \in \mathbb{C}([a,b])$ et $Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0$. Les intégrales fractionnaires de Riemann Liouville possédé les propriétés suivantes*

1. $I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f(x) = I_{a^+}^{\beta} I_{a^+}^{\alpha} f(x) = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x)$.
2. $I_{b^-}^{\alpha} I_{b^-}^{\beta} f(x) = I_{b^-}^{\beta} I_{b^-}^{\alpha} f(x) = I_{b^-}^{\alpha+\beta} f(x)$.

1.3 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4. ([3, page70]). Soit $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$. Les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville $\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(x)$ et $\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(x)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}, Re(\alpha) > 0$, sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{a^+}^{n-\alpha} f(x)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \; n = [Re(\alpha)] + 1; \; x > a, \end{aligned} \tag{1.3}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{b^-}^{n-\alpha} f(x)\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}},\ n = [Re(\alpha)]+1;\ x<b.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Respectivement, où $[Re(\alpha)]$ est la partie entière de $Re(\alpha)$.

Propriétés 1.3. ([3, page71]). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons

1. $\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}$,
2. $\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} (b-x)^{\beta-1} = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}$.

Propriétés 1.4.

1. Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordre entiers

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \mathcal{D}_{a^+}^{m} f(x) = f^{(m)}(x), \\ \mathcal{D}_{b^-}^{m} f(x) = (-1)^m f^{(m)}(x). \end{cases}$$

2. Si $0 < \alpha < 1$, alors $n = [\alpha] + 1 = 1$. Donc, 1.3 et 1.4 devient

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}}, x > a, \\ \mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(x) &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}}, x < b.\end{aligned}$$

3. Si $\beta = 1$ et $0 < Re(\alpha) < 1$, alors la dérivée au sens de Riemann Liouville d'une fonction constante en générale n'est pas nulle

$$\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} 1 = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} 1 = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

4. Pour tout $j = 1, 2, ..., n = [Re(\alpha)] + 1$ avec $Re(\alpha) \geq 0$, nous avons

$$\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} (x-a)^{\alpha-j} = \mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} (b-x)^{\alpha-j} = 0.$$

1.4 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.5. ([3]). Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $n = [Re(\alpha)] + 1$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que $f^{(n)} \in L^1([a, b])$. Les dérivées fractionnaires d'ordre α de f au sens de Caputo sont définies par

$$^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(x) = I_{a^+}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)\ dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \tag{1.5}$$

et

$$^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(x) = (-1)^n I_{b^-}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}. \tag{1.6}$$

Proposition 1.3. *([13]) . Soit $\alpha > 0, \beta > 0, n = [\alpha] + 1$, on a les propriétés suivantes*
Si $f(t) \in C^n([a,b])$, alors

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f)^k(a)}{k!}(t-a)^k,$$
$$\left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}(f)^k(b)}{k!}(b-t)^k.$$

En particulier si $0 < \alpha \leq 1$

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) - f(a),$$
$$\left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f\right)(t) = f(t) - f(b).$$

Proposition 1.4. *([3, page91]). Les relations entre les dérivées au sens de Caputo* (1.5), (1.6) *et les dérivées au sens de Riemann-Liouville* (1.3), (1.4) *sont données par*

$${}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right), \tag{1.7}$$

et

$${}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-x)^k\right). \tag{1.8}$$

On remarque que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, ..., n-1$ alors

$${}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(x) \quad \text{et} \quad {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(x) = \mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(x).$$

1.5 Généralité sur les matrices

Définition 1.6. ([4]) Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Une matrice de type (m, n) sur $\mathbb{K}$ est un tableau de scalaires (réels ou complexes) à m lignes et n colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Nous utilisons les abréviations suivantes , $A = (a_{ij})$ avec $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$ et $\mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices (m, n) sur $\mathbb{K}$

Définition 1.7. ([4]) Soit $A \in \mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$, la **transposée** de A notée A^T, est la matrice de $\mathscr{M}_{mn}(\mathbb{K})$ définie par

$$\left(A^T\right)_{ij} = A_{ji} \text{ pour tout } i = 1, \ldots, n \text{ et } j = 1, \ldots, m,$$

Si $A^T = A$ on dit que A est **symétrique** .
Soit A une matrice carrée, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de coefficients $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$.

Définition 1.8. ([4]) On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice B de taille n telle que

$$AB = BA = I_n,$$

La matrice B est appelle **inverse** de A et noté A^{-1}

Définition 1.9. ([4]) On dit que A est **tridiagonale** si $a_{ij} = 0,$ pour tout i, j tels que $|i - j| \geq 2$, i.e., si les seuls coefficients non nuls sont les coefficients diagonaux , ceux juste au-dessus de la diagonale , et ceux juste en-dessous de la diagonale

Définition 1.10. ([4]) On dit que A est à **diagonale strictement dominante par ligne** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \text{ avec } 1 \leq i \leq n.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \text{\Large 0} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ \text{\Large 0} & & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.1. *([4])Une matrice à **diagonale strictement dominante par ligne** est **inversible** .*

Démonstration. On doit montrer que

$$Ax = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)^t$ et k un indice telle que $|x_k| = \|x\|_\infty$. Alors,

$$Ax = 0 \Rightarrow a_{kk}.x_k = -\sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}.x_j$$

$$\Rightarrow |a_{kk}| \,.\, |x_k| \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}| \,.\, |x_j|$$

$$\Rightarrow |a_{kk}| \,.\, \|x\|_\infty \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}| \,.\, \|x\|_\infty$$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{|a_{kk}| - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|}_{>0} \right) . \|x\|_\infty \leq 0$$

$$\Rightarrow \|x\|_\infty \leq 0$$

$$\Rightarrow x = 0.$$

□

Définition 1.11. ([4])Le **rayon spectral** de A est définie par

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \,,$$

où λ_i sont les valeurs propres de la matrice A.

1.6 Les normes vectorielles et matricielles

Ici $=_{\mathbb{C}}\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$.

1.6.1 Normes vectorielles

Définition 1.12. ([4])Une norme sur $\mathbb{K}^n$ est un application $\|.\| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+$ telle que

1. $\|x\| = 0$ équivalente $x = 0_n,$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \,,$ pour tout $x, y \in \mathbb{K}^n,$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^n$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \,,$ pour tout $x, y \in \mathbb{K}^n$ (Inégalité triangulaire).

On défini la p-norme , pour $1 \leq p \leq +\infty$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{P}} .$$

Les normes les plus usuelles sont

1. La norme :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| .$$

2. La norme (norme euclidienne) :

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

3. La norme (norme de sup) :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| .$$

1.6.2 Normes matricielles

A partir de normes vectorielles, on définit les trois normes matricielles subordonnées $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x|_p = 1} \|Ax\|_p ,$$

où $p = 1, 2,$ où ∞.

Proposition 1.5. *Pour chacune de ces trois normes, on a pour toutes A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

$$\|AB\| \leq \|A\| . \|B\| ,$$

et

$$\|Ax\| \leq \|A\| . \|x\| ,$$

où $\|.\| = \|.\|_1$ où $\|.\|_2$ où $\|.\|_\infty$.

Remarque 1.3. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors,

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| ,$$
$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| ,$$
$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}.$$

Théorème 1.2. *([21, page18])*

– *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors pour toute norme matricielle $\|.\|$*

$$\rho(A) \leq \|A\| .$$

– *Étant donné une matrice A et un nombre $\epsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que*

$$\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon.$$

1.7 Schéma de différences finies

Définition 1.13. Un maillage est un ensemble des points isoles (appelles nœuds) situes dans le domaine de définition des fonctions assujetties aux équations aux dérivées partielles. On appelle pas de maillage la distance entre deux nœuds voisins.

Définition 1.14. (voir[22])Soit $u(x)$ représenté une fonction d'un variable, les schémas de différences finies sont obtenus grâce aux formule de Taylor. Formule Taylor d'ordre 01

$$u(x+h) = h(x) + hu^{'}(x) + o(h). \tag{1.9}$$

Formules de Taylor d'ordre 02

$$u(x+h) = h(x) + hu^{'}(x) + \frac{h^2}{2!}u^{''}(x) + o\left(h^2\right). \tag{1.10}$$

En un point $x \in [l, L]$ et pour une valeur h de pas du discrétisation donne par $\frac{L-l}{N}$,
approximation avant

$$u^{'}(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + o(h), \tag{1.11}$$

approximation arriéré

$$u^{'}(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + o(h), \tag{1.12}$$

approximation centre

$$u^{'}(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + o(h), \tag{1.13}$$

et si passant sur (1.10) et (1.13) nous obtenons

$$u^{''}(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + o(h^2).$$

1.7.1 Stabilité et convergence

Un certain nombre de notion est nécessaire lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles au moyen de leurs équivalentes discrétises . Les deux principales sont la **stabilité** et la **convergence**

Définition 1.15. ([9])Un schéma aux différence finie est dite stable pour la norme $\|.\|_\infty$, s'il existe une constante $C > 0$ indépendante de pas de maillage , telle que

$$\|u^n\|_\infty \leq C. \left\|u^0\right\|_\infty, \text{ pour tout } n \geq 0,$$

quelle que soit la donnée initiale u^0.

Définition 1.16. ([1])(**Erreur de troncature**)On appelle erreur de troncature la quantité obtenue en remplaçant l'inconnue par la solution exacte dans le schéma numérique , que nous désignons par R_i.

Proposition 1.6. *([22])Soit u_i l'approximation de la solution exacte $u(x_i)$, il est naturel d'utiliser les erreurs ponctuelles $u_i - u(x_i)$. Si on pose $\hat{U}$ le vecteur des valeurs exactes et U le vecteur des valeurs discrètes, alors le vecteur d'erreur E définie par*

$$E = U - \hat{U}.$$

.

Définition 1.17. ([22])Une méthode est dite convergente si

$$\|E\| \to 0 \text{ lorsque } h \to 0.$$

.

CHAPITRE 2

PROBLÈME DIRECT

Dans ce chapitre, nous avons introduit un schéma de différence finie implicite basé sur la discrétisation d'une équation intégro-différentielle équivalente et l'interpolation linéaire de Lagrange, et la stabilité numérique et la convergence du système linéaire sont prouvées avec une analyse spectrale à la matrice de coefficients du schéma, et un exemple numérique est présenté.

2.1 Positon du problème

On considéré le problème suivante

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}}(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]+f(x,t), \qquad 0<x<L, 0<t<T, 1<\alpha<2. \tag{2.1}$$

$$u(x,0)=\phi(x),\ \ u_t(x,0)=\varphi(x) \qquad 0\leq x\leq L, \tag{2.2}$$

$$u_x(0,t)=u_x(L,t)=0 \qquad 0<t\leq T. \tag{2.3}$$

Où $L,T>0, f.D\in C^1([0,L]), \phi.\varphi\in C([0,L]), D>0$ sur $[0,L]$ et $\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo définie par

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}}(x,t)={}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{1-\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x,s)\,ds, \tag{2.4}$$

où (2.2) sont les conditions initiales , (2.3) sont les conditions aux limites de Neumann , $D(x)$ est le coefficient de diffusion-onde dépendant de l'espace et $f(x,t)$ est un terme source .
Évidemment, le opérateur de Caputo ${}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}$ est le composition de le opérateurs ${}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha-1}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$, i.e.,

$$\begin{aligned}
{}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}u(x,t)&=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{1-\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(x,s)\,ds\\
&=\frac{1}{\Gamma(1-(\alpha-1))}\int_0^t (t-s)^{-(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial s}(x,s)\right)ds\\
&={}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha-1}u_t(x,t),
\end{aligned}$$

donc,

$${}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha}u(x,t)={}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha-1}\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]. \tag{2.5}$$

Sur la base de cette composition, il soutient que :

Théorème 2.1. *([15]) Équation* (2.1) *est équivalant à l'équation intégro-différentielle suivante*

$$\begin{aligned}
u_t(x,t)=\varphi(x)+\frac{dD(x)}{dx}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\frac{\partial u}{\partial x}(x,s)ds+\frac{D(x)}{\Gamma(\alpha-1)}\\
\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,s)ds+F(x,t),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

où $F(x,t)=\mathcal{I}_t^{\alpha-1}f(x,t)$, et $\mathcal{I}_t^{\beta}$ est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\beta>0$ définie par

$$\mathcal{I}_t^{\beta}f(x,t)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}f(x,s)ds.$$

Démonstration. D'après l'équation (2.1) et (2.5), on a

$${}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha-1}\left[\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]=D(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+\frac{dD(x)}{dx}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)+f(x,t),$$

on applique l'intégral fractionnaire de Riemann-Liouville on trouve

$$\mathcal{I}_t^{\alpha-1}\left[{}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha-1}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right)\right]=\mathcal{I}_t^{\alpha-1}\left[D(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+\frac{dD(x)}{dx}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)+f(x,t)\right], \tag{2.7}$$

d'après linéarité de $\mathcal{I}^{\alpha}$ et le proposition 1.3, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{dD(x)}{dx}\mathcal{I}_t^{\alpha-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) + D(x)\mathcal{I}_t^{\alpha-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right) + \mathcal{I}_t^{\alpha-1}f(x,t),$$

implique que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \varphi(x) + \frac{dD(x)}{dx}\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\frac{\partial u}{\partial x}(x,s)ds + \frac{D(x)}{\Gamma(\alpha-1)}$$
$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}f(x,s)ds.$$

□

2.2 Méthode de différence finie

Considérons l'équation de diffusion-onde fractionnaire temporelle (2.1) avec les conditions initiales (2.2) et les conditions aux limites (2.3). Commençons d'abord par la méthode numérique pour le problème direct donne par l'équation (2.1) avec les conditions initiales (2.2) et les conditions aux limites (2.3). Base sur l'équation intégro-différentielle (2.6),
Premier-ment, nous discrétions le domaine de l'espace par

$$x_i = ih, \;\; i = 1,2,\ldots,M, \quad h = \frac{L}{M} \;\; \text{(pas de maillage de l'espace)},$$
$$\text{donc}, x_0 = 0 \;\; \text{et} \;\; x_M = L,$$

et le domaine temporel par

$$t_n = n\mu, \;\; n = 1,2,\ldots,N, \quad \mu = \frac{T}{N} \;\; \text{(pas de maillage de temporel)},$$
$$\text{donc}, t_0 = 0 \;\; \text{et} \;\; t_N = T.$$

Lemme 2.1. *([15]) Si $f(t) \in C([0,T])$ et $1 < \alpha < 2$, alors*

$$\mathcal{I}_t^{\alpha-1}f(t_{n+1}) = \frac{\mu^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n+1} w_k f(t_{n+1-k}),$$

où

$$\begin{cases} w_0 & = 1, \\ w_k & = (k+1)^{\alpha} - 2(k)^{\alpha} + (k-1)^{\alpha} \text{ pour } k = 1,2,\ldots,n, \\ w_{n+1} & = \alpha(n+1)^{\alpha-1} - (n+1)^{\alpha} + n^{\alpha}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Démonstration.

$$\mathcal{I}_t^{\alpha-1}f(t_{n+1}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^{t_{n+1}} (t_{n+1}-s)^{\alpha-2}f(s)ds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\sum_{k=0}^{n}\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+1}-s)^{\alpha-2}f(s)ds,$$

$$\mathcal{I}_t^{\alpha-1} f(t_{n+1}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} s^{\alpha-2} f(t_{n+1}-s) ds, \tag{2.9}$$

on applique **l'interpolation linéaire de Lagrange** (voir[5]) sur $f(t_{n+1}-s)$ et $s \in (t_k, t_{k+1})$, on obtient

$$f(t_{n+1}-s) = \frac{s-t_k}{\mu} f(t_{n+1}-t_{k+1}) + \frac{t_{k+1}-s}{\mu} f(t_{n+1}-t_k), \tag{2.10}$$

en remplaçant (2.10) dans (2.9), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_t^{\alpha-1} f(t_{n+1}) = \frac{1}{\mu\Gamma(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{n} f(t_{n-k}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} s^{\alpha-2}(s-t_k) ds + \frac{1}{\mu\Gamma(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{n} f(t_{n+1-k}) \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} s^{\alpha-2}(t_{k+1}-s) ds, \end{aligned} \tag{2.11}$$

d'autre part

$$(I1) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} s^{\alpha-2}(s-t_k) ds = \frac{\mu^\alpha}{\alpha(\alpha-1)} \left[\alpha(k+1)^{\alpha-1} - (k+1)^\alpha + (k)^\alpha\right],$$

et

$$(I2) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} s^{\alpha-2}(t_{k+1}-s) ds = \frac{\mu^\alpha}{\alpha(\alpha-1)} \left[(k+1)^\alpha - (k)^\alpha - \alpha(k)^{\alpha-1}\right],$$

en remplace $(I1)$ et $(I2)$ dans (2.11), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_t^{\alpha-1} f(t_{n+1}) = & \frac{\mu^{\alpha-1}}{\alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{n} \left[\alpha(k+1)^{\alpha-1} - (k+1)^\alpha + k^\alpha\right] f(t_{n-k}) \\ & + \frac{\mu^{\alpha-1}}{\alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^\alpha - k^\alpha - \alpha k^{\alpha-1}\right] f(t_{n+1-k}), \end{aligned}$$

et d'après le Propriété 1.1, on a
$\alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) = \Gamma(\alpha+1)$, donc

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_t^{\alpha-1} f(t_{n+1}) = & \frac{\mu^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} \left[\alpha(k+1)^{\alpha-1} - (k+1)^\alpha + k^\alpha\right] f(t_{n-k}) \\ & + \frac{\mu^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^\alpha - k^\alpha - \alpha k^{\alpha-1}\right] f(t_{n+1-k}). \end{aligned} \tag{2.12}$$

On pose $k^{'} = k+1 \Rightarrow k = k^{'} - 1$, nous avons

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow k^{'} = 1, \\ k = n \Rightarrow k^{'} = n+1. \end{cases}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\alpha(k+1)^{\alpha-1} - (k+1)^\alpha + k^\alpha\right] f(t_{n-k}) = \sum_{k=1}^{n+1} \left[\alpha(k)^{\alpha-1} - (k)^\alpha + (k-1)^\alpha\right] f(t_{n+1-k}), \tag{2.13}$$

en remplace (2.13) dans (2.12), on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_t^{\alpha-1}f(t_{n+1}) &= \frac{\mu^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\sum_{k=1}^{n+1}\left[\alpha(k)^{\alpha-1}-(k)^{\alpha}+(k-1)^{\alpha}\right]f(t_{n+1-k})\right.\\ &\left.+\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^{\alpha}-k^{\alpha}-\alpha k^{\alpha-1}\right]f(t_{n+1-k})\right]\\ &= \frac{\mu^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[\left(\alpha(n+1)^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha}+n^{\alpha}\right)f(t_0)\right.\\ &\left.+f(t_{n+1})+\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^{\alpha}-2(k)^{\alpha}+(k-1)^{\alpha}\right)f(t_{n+1-k})\right].\end{aligned}$$

On pose

$$\begin{cases} w_0 = 1, \\ w_{n+1} = \alpha(n+1)^{\alpha-1}-(n+1)^{\alpha}+n^{\alpha}, \\ w_k = (k+1)^{\alpha}-2(k)^{\alpha}+(k-1)^{\alpha}, \quad k=1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Donc

$$\mathcal{I}_t^{\alpha-1}f(t_{n+1}) = \frac{\mu^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n+1}w_k f(t_{n+1-k}).$$

□

Puis, on calculer l'équation intégro-différentielle définie par (2.6) en point de maillage (x_i, t_{n+1}), nous avons

$$\frac{\partial u(x_i,t_{n+1})}{\partial t} = \frac{dD(x_i)}{dx}\mathcal{I}_t^{\alpha-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_{n+1})\right)+D(x_i)\mathcal{I}_t^{\alpha-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{n+1})\right)+F(x_i,t_{n+1})+\varphi(x_i), \quad (2.14)$$

En suite, nous discrétisons les dérivées d'ordre entier $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{dD}{dx}$, en utilisant le schéma de différence arrière sur un ordre,

$$\frac{\partial u(x_i,t_{n+1})}{\partial t} = \frac{u(x_i,t_{n+1})-u(x_i,t_n)}{\mu}+o(\mu), \quad (2.15)$$

et

$$\frac{dD(x_i)}{dx} = \frac{D(x_i)-D(x_{i-1})}{h}+o(h), \quad (2.16)$$

en remplaçant (2.15) , (2.16) dans (2.14)

$$\begin{aligned}\frac{u(x_i,t_{n+1})-u(x_i,t_n)}{\mu} &= \frac{D(x_i)-D(x_{i-1})}{h}\mathcal{I}_t^{\alpha-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_{n+1})\right)+D(x_i)\mathcal{I}_t^{\alpha-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{n+1})\right)\\ &+F(x_i,t_{n+1})+\varphi(x_i),\end{aligned}$$

et d'après le Lemme 2.1 on obtient

$$\begin{aligned}\frac{u(x_i,t_{n+1})-u(x_i,t_n)}{\mu} &= \frac{\mu^{\alpha-1}\left(D(x_i)-D(x_{i-1})\right)}{\Gamma(\alpha+1)h}\sum_{k=0}^{n+1}w_k\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_{n+1-k})\\ &+\frac{\mu^{\alpha-1}D(x_i)}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n+1}w_k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_{n+1-k}).\end{aligned} \quad (2.17)$$

Enfin, nous discrétions les dérivées d'ordre entier $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$, en utilisons un schéma générale de différence centre sur deux ordre et schème de différence arriéré sur un ordre, respectivement.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{n+1-k}) = \frac{u(x_{i+1}, t_{n+1-k}) - 2u(x_i, t_{n+1-k}) + u(x_{i-1}, t_{n+1-k})}{h^2} + o(h^2), \tag{2.18}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{n+1-k}) = \frac{u(x_i, t_{n+1-k}) - u(x_{i-1}, t_{n+1-k})}{h} + o(h). \tag{2.19}$$

Soit $u_i^n \approx u(x_i, t_n), D_i \approx D(x_i)$.
En remplace (2.18) et (2.19) dans (2.17), on obtient

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - u_i^n = \frac{\mu^\alpha (D_i - D_{i-1})}{h^2\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n+1} w_k \left(u_i^{n+1-k} - u_{i-1}^{n+1-k}\right) + \frac{\mu^\alpha D_i}{h^2\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n+1} w_k \Big(u_{i+1}^{n+1-k} \\ -2u_i^{n+1-k} + u_{i-1}^{n+1-k}\Big) + \mu(F_i^{n+1} + \varphi_i), \end{aligned} \tag{2.20}$$

où $i = 1, 2, \ldots, M-1$.
On pose

$$p_i = \frac{D_i \mu^\alpha}{h^2\Gamma(\alpha+1)}, \quad q_i = \frac{(D_i - D_{i-1})\mu^\alpha}{h^2\Gamma(\alpha+1)}. \tag{2.21}$$

En remplaçant (2.21) dans (2.20), on obtient

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - u_i^n = p_i \sum_{k=0}^{n+1} w_k \left(u_{i+1}^{n+1-k} - 2u_i^{n+1-k} + u_{i-1}^{n+1-k}\right) + q_i \sum_{k=0}^{n+1} w_k \left(u_i^{n+1-k} - u_{i-1}^{n+1-k}\right) \\ +\mu(F_i^{n+1} + \varphi_i), \end{aligned}$$

implique que

$$\begin{aligned} (q_i - p_i)u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2p_i - q_i)u_i^{n+1} - p_i u_{i+1}^{n+1} = (w_1 p_i - w_1 q_i)u_{i-1}^n + (1 + w_1 q_i - 2w_1 p_i)u_i^n + w_1 p_i u_{i+1}^n \\ + \sum_{k=2}^{n} w_k \left((p_i - q_i)u_{i-1}^{n+1-k} + (q_i - 2p_i)u_i^{n+1-k} + p_i u_{i+1}^{n+1-k}\right) + \mu\left(F_i^{n+1} + \varphi_i\right). \end{aligned}$$

La condition initiale (2.2) et les conditions aux limites (2.3) sont discrétisées comme suit

$$\begin{aligned} &\text{le condition initiale} \\ &u_i^0 = \phi(x_i). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Les conditions de Neumann

$$\begin{aligned} u_x(0,t) = 0 \Leftrightarrow \frac{u(x_1, t_{n+1}) - u(0, t_{n+1})}{h} = 0 \\ \Leftrightarrow u(x_1, t_{n+1}) = u(0, t_{n+1}) \\ \Leftrightarrow u_1^{n+1} = u_0^{n+1}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

et

$$\begin{aligned} u_x(L, t_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow \frac{u(x_M, t_{n+1}) - u(x_{M-1}, t_{n+1})}{h} = 0 \\ \Leftrightarrow u(x_M, t_{n+1}) = u(x_{M-1}, t_{n+1}) \\ \Leftrightarrow u_M^{n+1} = u_{M-1}^{n+1}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Par conséquent, un schéma de différence finie implicite peut être donne comme suit
pour $n = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}(q_i - p_i)u_{i-1}^1 + (1 + 2p_i - q_i)u_i^1 - p_i u_{i+1}^1 &= (w_1 p_i - w_1 q_i)u_{i-1}^0 \\ &+ (1 + w_1 q_i - 2w_1 p_i)u_i^0 + w_1 p_i u_{i+1}^0 + \mu(F_i^1 + \varphi_i),\end{aligned} \tag{2.25}$$

pour $n > 1$, on obtient

$$\begin{aligned}(q_i - p_i)u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2p_i - q_i)u_i^{n+1} - p_i u_{i+1}^{n+1} &= (w_1 p_i - w_1 q_i)u_{i-1}^n + (1 + w_1 q_i - 2w_1 p_i)u_i^n + w_1 p_i u_{i+1}^n \\ &+ \sum_{k=2}^{n+1} w_k \left((p_i - q_i)u_{i-1}^{n+1-k} + (q_i - 2p_i)u_i^{n+1-k} + p_i u_{i+1}^{n+1-k}\right) + \mu(F_i^{n+1} + \varphi_i).\end{aligned} \tag{2.26}$$

Donc le système matricielle correspondante est
-pour $i = 1$, on a

$$\begin{aligned}(q_1 - p_1)u_0^{n+1} + (1 + 2p_1 - q_1)u_1^{n+1} - p_1 u_2^{n+1} &= (w_1 p_1 - w_1 q_1)u_0^n + (1 + w_1 q_1 - 2w_1 p_1)u_1^n + w_1 p_1 u_2^n \\ &+ \sum_{k=2}^{n} w_k \left((p_1 - q_1)u_0^{n+1-k} + (q_1 - 2p_1)u_1^{n+1-k} + p_1 u_2^{n+1-k}\right) + \mu(F_1^{n+1} + \varphi_1),\end{aligned}$$

-pour $i = 2$, on a

$$\begin{aligned}(q_2 - p_2)u_1^{n+1} + (1 + 2p_2 - q_2)u_2^{n+1} - p_2 u_3^{n+1} &= (w_1 p_2 - w_1 q_2)u_1^n + (1 + w_1 q_2 - 2w_1 p_2)u_2^n + w_1 p_2 u_3^n \\ &+ \sum_{k=2}^{n} w_k \left((p_2 - q_2)u_1^{n+1-k} + (q_2 - 2p_2)u_2^{n+1-k} + p_2 u_3^{n+1-k}\right) + \mu(F_2^{n+1} + \varphi_2),\end{aligned}$$

$\vdots$
$\vdots$
$\vdots$

-pour $i = M - 1$, on a

$$\begin{aligned}(q_{M-1} - p_{M-1})u_{M-2}^{n+1} + (1 + 2p_{M-1} - q_{M-1})u_{M-1}^{n+1} - p_{M-1}u_M^{n+1} &= (w_1 p_{M-1} - w_1 q_{M-1})u_{M-2}^n \\ &+ (1 + w_1 q_{M-1} - 2w_1 p_{M-1})u_{M-1}^n + w_1 p_{M-1} u_M^n + \sum_{k=2}^{n+1} w_k \Big[(p_{M-1} - q_{M-1})u_{M-2}^{n+1-k} \\ &+ (q_{M-1} - 2p_{M-1})u_{M-1}^{n+1-k} + p_{M-1}u_M^{n+1-k}\Big] + \mu(F_{M-1}^{n+1} + \varphi_{M-1}),\end{aligned}$$

en remplaçant (2.22), (2.23) et (2.24) dans le système matricielle nous obtenons
-pour $i = 1$, on a

$$\begin{aligned}(1 + p_1)u_1^{n+1} - p_1 u_2^{n+1} &= (1 - w_1 p_1)u_1^n + w_1 p_1 u_2^n \\ &+ \sum_{k=2}^{n+1} w_k \left(-p_1 u_1^{n+1-k} + p_1 u_2^{n+1-k}\right) + \mu(F_1^{n+1} + \varphi_1),\end{aligned}$$

-pour $i = 2$, on a

$$\begin{aligned}(q_2 - p_2)u_1^{n+1} + (1 + 2p_2 - q_2)u_2^{n+1} - p_2 u_3^{n+1} &= (w_1 p_2 - w_1 q_2)u_1^n + (1 + w_1 q_2 - 2w_1 p_2)u_2^n + w_1 p_2 u_3^n \\ &+ \sum_{k=2}^{n} w_k \left((p_2 - q_2)u_1^{n+1-k} + (q_2 - 2p_2)u_2^{n+1-k} + p_2 u_3^{n+1-k}\right) \\ &+ \mu(F_2^{n+1} + \varphi_2),\end{aligned}$$

$\vdots$
$\vdots$
$\vdots$

-pour $i = M-1$, on a

$$(q_{M-1} - p_{M-1})u_{M-2}^{n+1} + (1 + p_{M-1} - q_{M-1})u_{M-1}^{n+1} = (w_1 p_{M-1} - w_1 q_{M-1})u_{M-2}^{n} + (1 + w_1 q_{M-1} - w_1 p_{M-1})u_{M-1}^{n}$$
$$+ \sum_{k=2}^{n} w_k \left((p_{M-1} - q_{M-1})u_{M-2}^{n+1-k} + (q_{M-1} - p_{M-1})u_{M-1}^{n+1-k} \right) + \mu(F_{M-1}^{n+1} + \varphi_{M-1}).$$

Soit

$$\begin{aligned} U^k &= (u_1^k, u_2^k, \ldots, u_{M-1}^k)^T, \\ \phi &= (\phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_{M-1}))^T, \\ \varphi &= (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_{M-1}))^T, \end{aligned}$$

et w_k définie par (2.8) et les matrices $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ et $C = (c_{ij}), i.j = 1, 2, \ldots, M-1$ sont définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1+p_1 & -p_1 & & & 0 \\ q_2 - p_2 & 1 + 2p_2 - q_2 & -p_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & q_{M-2} - p_{M-2} & 1 + 2p_{M-2} - q_{M-2} & -p_{M-2} \\ 0 & & & q_{M-1} - p_{M-1} & 1 + p_{M-1} - q_{M-1} \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 - w_1 p_1 & w_1 p_1 & & & 0 \\ w_1 p_2 - w_1 q_2 & 1 + w_1 q_2 - 2w_1 p_2 & w_1 p_2 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & w_1 p_{M-2} - w_1 q_{M-2} & 1 + w_1 q_{M-2} - 2w_1 p_{M-2} & w_1 p_{M-2} & \\ 0 & & w_1 p_{M-1} - w_1 q_{M-1} & 1 + w_1 q_{M-1} - w_1 p_{M-1} & \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

et

$$C = \begin{pmatrix} -p_1 & p_1 & & & 0 \\ p_2 - q_2 & q_2 - 2p_2 & p_2 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & p_{M-2} - q_{M-2} & q_{M-2} - 2p_{M-2} & p_{M-2} & \\ 0 & & p_{M-1} - q_{M-1} & 1 + q_{M-1} - p_{M-1} & \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

Donc le schéma de différence finie (2.25), (2.26) peut être réécrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} U^0 = \phi, \\ AU^1 = BU^0 + \mu(F^1 + \varphi), \\ AU^{n+1} = BU^n + \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} w_k C U^{n+1-k} + \mu(F^{n+1} + \varphi). \end{cases} \tag{2.30}$$

La matrice A est tridiagonale à diagonale strictement dominante par ligne donc le système (2.30) admet une solution unique.

2.2.1 Stabilité et convergence du schéma de différence

Tout d'abord, en notant les définitions d'un a_{ij} de l'élément de la matrice A et b_{ij}, c_{ij} l'éléments des matrices B et C respectivement, et p_i avec q_i donnes par (2.21)

Lemme 2.2. *([8, 11]) Supposons que $D(x)$ prenne seulement une valeur positive pour $x \in (0, L)$*

1. *la matrice A définie par* (2.27) *et à diagonale dominante par ligne, on a*

$$a_{ii} = 1 + \sum_{j=1, j\neq i}^{M-1} |a_{ij}|, \quad pour\ i = 1, 2, \ldots, M-1. \tag{2.31}$$

Avec $\sum_{j=1, j\neq i}^{M-1} |a_{ij}| < 0 \quad pour\ i = 1, 2, \ldots, M-1.$

2. *La matrice B définie par* (2.28) *vérifiant*

$$b_{ii} = 1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{M-1} |b_{ij}|, \quad pour\ i = 1, 2, \ldots, M-1. \tag{2.32}$$

Avec $\sum_{j=1, j\neq i}^{M-1} |b_{ij}| > 0 \quad pour\ i = 1, 2, \ldots, M-1.$

3. *La matrice C définie par* (2.29) *vérifiant*

$$c_{ii} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{M-1} |c_{ij}|, \quad pour\ i = 1, 2, \ldots, M-1. \tag{2.33}$$

Avec $\sum_{j=1, j\neq i}^{M-1} |c_{ij}| > 0 \quad pour\ i = 1, 2, \ldots, M-1.$

Démonstration. 1. Pour montre que

$$a_{ii} = 1 + \sum_{j=1, j\neq i}^{M-1} |a_{ij}|, \quad pour\ i = 1, 2, \ldots, M-1,$$

on utilise la démonstration par récurrence
-pour $i = 1$ on a

$$\sum_{j=1, j\neq 1}^{M-1} |a_{1j}| = |a_{12}| = |-p_1| = p_1,$$

et

$$a_{11} = 1 + p_1,$$

donc

$$a_{ii} = 1 + \sum_{j=1, j\neq i}^{M-1} |a_{ij}|, \quad pour\ i = 1.$$

-supposons que

$$a_{M-2M-2} = 1 + \sum_{j=1, j\neq M-2}^{M-1} |a_{M-2j}|,$$

-montrons l'égalité pour $i = M-1$

$$a_{M-1M-1} = 1 + p_{M-1} - q_{M-1},$$

et

$$\sum_{j=1, j\neq M-1}^{M-1} |a_{M-1j}| = |a_{M-1M-2}| = |q_{M-1} - p_{M-1}|$$
$$= -(q_{M-1} - p_{M-1}) = p_{M-1} - q_{M-1},$$

alors

$$a_{M-1M-1} = 1 + \sum_{j=1, j\neq M-1}^{M-1} |a_{M-1j}|.$$

D'où

$$a_{ii} = 1 + \sum_{j=1, j\neq i}^{M-1} |a_{ij}|, \quad pour i = 1, 2, \ldots, M-1.$$

2. Pour montre que

$$b_{ii} = 1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{M-1} |b_{ij}|, \quad pour\ i = 1, 2, \ldots, M-1.$$

on utilise la démonstration par récurrence
-pour $i = 1$ on a

$$\sum_{j=1, j\neq 1}^{M-1} |b_{1j}| = |b_1 p_1| = b_1 p_1,$$

et

$$b_{11} = 1 - w_1 p_1,$$

donc

$$b_{ii} = 1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{M-1} |b_{ij}|, \quad pour\ i = 1,$$

-supposons que

$$b_{M-2M-2} = 1 - \sum_{j=1, j\neq M-2}^{M-1} |b_{M-2j}|,$$

-montrons l'égalité pour $i = M-1$

$$b_{M-1M-1} = 1 + w_1 q_{M-1} - w_1 p_{M-1},$$

et

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1, j\neq M-1}^{M-1} |b_{M-1j}| &= -|w_1 p_{M-1} - w_1 q_{M-1}| = -(w_1 p_{M-1} - w_1 q_{M-1}) \\ &= w_1 q_{M-1} - w_1 p_{M-1}, \end{aligned}$$

alors

$$b_{M-1M-1} = 1 - \sum_{j=1, j\neq M-1}^{M-1} |a_{M-1j}|.$$

D'où

$$b_{ii} = 1 - \sum_{j=1, j\neq i}^{M-1} |b_{ij}|, \quad pour i = 1, 2, \ldots, M-1.$$

3. Pour montre que

$$c_{ii} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{M-1} |c_{ij}|, \quad pour\ i = 1, 2, \ldots, M-1.$$

on utilise la démonstration par récurrence
-pour $i = 1$ on a

$$-\sum_{j=1, j\neq 1}^{M-1} |c_{1j}| = -|p_1| = -p_1,$$

et

$$c_{11} = 1 - p_1,$$

donc

$$c_{ii} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{M-1} |c_{ij}|, \quad pour\ i = 1,$$

-supposons que

$$c_{M-2M-2} = -\sum_{j=1, j\neq M-2}^{M-1} |c_{M-2j}|,$$

-montrons l'égalité pour $i = M-1$

$$c_{M-1M-1} = q_{M-1} - p_{M-1},$$

et

$$-\sum_{j=1, j\neq M-1}^{M-1} |c_{M-1j}| = -|p_{M-1} - q_{M-1}| = -(p_{M-1} - q_{M-1}) = q_{M-1} - p_{M-1},$$

alors

$$c_{M-1M-1} = -\sum_{j=1, j\neq M-1}^{M-1} |c_{M-1j}|.$$

D'où

$$c_{ii} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{M-1} |c_{ij}|, \quad pour i = 1, 2, \ldots, M-1.$$

□

Proposition 2.1. *([8, 11]) Dans les conditions de Lemme 2.2, on a*

1.

$$1 < \rho(A) < 2\|a\|_\infty - 1, \tag{2.34}$$

et

$$\frac{1}{2\|a\|_\infty - 1} < \rho(A^{-1}) < 1, \tag{2.35}$$

où $\|a\|_\infty = \max_{1\leq i\leq M-1} |a_{ii}|$.

2.

$$2\|b\|_\infty - 1 < \rho(B) < 1, \tag{2.36}$$

où $\|b\|_\infty = \max_{1\leq i\leq M-1} |b_{ii}|$.

3.

$$\rho(C) < 2\|c\|_\infty, \tag{2.37}$$

où $\|c\|_\infty = \max_{1\leq i\leq M-1} |c_{ii}|$.

Démonstration. 1. Supposons que

$$A\Theta = \lambda\Theta.$$

Où λ est une valeur propre de la matrice A , et $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{M-1}) \neq 0$ est le vecteur propre correspondant , telle que

$$|\theta_k| = \max_{1\leq i\leq M-1} |\theta_i|,$$

alors

$$\begin{cases} (1+p_1)\theta_1 - p_1\theta_2 & = \lambda\theta_1, \\ (q_2 - p_2)\theta_1 + (1+2p_2 - q_2)\theta_2 - p_2\theta_3 & = \lambda\theta_2, \\ \quad \ddots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots & \\ (q_{M-2} - p_{M-2})\theta_{M-3} + (1+2p_{M-2} - q_{M-2})\theta_{M-2} - p_{M-2}\theta_{M-1} & = \lambda\theta_{M-2}, \\ \qquad\qquad (q_{M-1} - p_{M-1})\theta_{M-2} + (1+p_{M-1} - q_{M-1})\theta_{M-1} & = \lambda\theta_{M-1}. \end{cases}$$

En considérant la k-ieme équation de $A\Theta = \lambda\Theta$ on a

$$\sum_{j=1}^{M-1} a_{kj}\theta_j = \lambda\theta_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, M-1,$$

donc

$$\sum_{j=1, j\neq k}^{M-1} a_{kj}\frac{\theta_j}{\theta_k} + a_{kk}\frac{\theta_k}{\theta_k} = \lambda\frac{\theta_k}{\theta_k} \quad , k = 1, 2, \ldots, M-1,$$

on obtient

$$\sum_{j=1, j\neq k}^{M-1} a_{kj}\frac{\theta_j}{\theta_k} = \lambda - a_{kk},$$

d'autre part on a

$$\left|\frac{\theta_j}{\theta_k}\right| = \frac{|\theta_j|}{|\theta_k|} < 1,$$

d'après les propriété de la valeur absolue et en utilisant Lemme 2.2, on obtient

$$|\lambda - a_{kk}| < \sum_{j=1, j\neq k}^{M-1} |a_{kj}| = a_{kk} - 1, \qquad \textit{pour } k = 1, 2, \ldots, M-1.$$

Alors

$$|\lambda - a_{kk}| < a_{kk} - 1, \qquad \textit{pour } k = 1, 2, \ldots, M-1.$$

d'autre part

$$||\lambda| - |a_{kk}|| < |\lambda - a_{kk}|,$$

implique que

$$1 - a_{kk} < |\lambda| - a_{kk} < a_{kk} - 1,$$

finalement on obtient

$$1 < |\lambda| < 2a_{kk} - 1.$$

Ce que signifier que les assertions (2.34) et (2.35) sont toutes deux valides.

2. Supposons que

$$B\Theta = \lambda\Theta.$$

Où λ est une valeur propre de la matrice B, et $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{M-1}) \neq 0$ est le vecteur propre correspondant, telle que

$$|\theta_k| = \max_{1\leq i\leq M-1} |\theta_i|,$$

alors

$$\begin{cases} (1-w_1p_1)\theta_1 + w_1p_1\theta_2 & = \lambda\theta_1, \\ (w_1p_2 - w_1q_2)\theta_1 + (1+w_1q_2-2w_1p_2)\theta_2 + w_1p_2\theta_3 & = \lambda\theta_2, \\ \quad \ddots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots & \\ (w_1p_{M-2} - w_1q_{M-2})\theta_{M-3} + (1+w_1q_{M-2}-2w_1p_{M-2})\theta_{M-2} + w_1p_2\theta_{M-1} & = \lambda\theta_{M-2}, \\ \qquad\qquad (w_1p_{M-1} - w_1q_{M-1})\theta_{M-2} + (1+w_1q_{M-1}-w_1p_{M-1})\theta_{M-1} & = \lambda\theta_{M-1}. \end{cases}$$

En considérant la k-ieme équation de $B\Theta = \lambda\Theta$ on a

$$\sum_{j=1}^{M-1} b_{kj}\theta_j = \lambda\theta_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, M-1,$$

donc

$$\sum_{j=1, j\neq k}^{M-1} b_{kj}\frac{\theta_j}{\theta_k} + b_{kk}\frac{\theta_k}{\theta_k} = \lambda\frac{\theta_k}{\theta_k} \quad , k = 1, 2, \ldots, M-1,$$

on obtient

$$\sum_{j=1, j\neq k}^{M-1} b_{kj}\frac{\theta_j}{\theta_k} = \lambda - b_{kk},$$

d'autre part on a

$$\left|\frac{\theta_j}{\theta_k}\right| = \frac{|\theta_j|}{|\theta_k|} < 1,$$

d'après les propriétés de la valeur absolue et en utilisant Lemme 2.2, on obtient

$$|\lambda - b_{kk}| < \sum_{j=1, j\neq k}^{M-1} |b_{kj}| = 1 - b_{kk}, \qquad\qquad pour\ k = 1, 2, \ldots, M-1.$$

Alors

$$|\lambda - b_{kk}| < 1 - b_{kk}, \qquad\qquad pour\ k = 1, 2, \ldots, M-1.$$

d'autre part

$$||\lambda| - |b_{kk}|| < |\lambda - b_{kk}|\,,$$

implique que

$$b_{kk} - 1 < |\lambda| - b_{kk} < 1 - b_{kk},$$

finalement on obtient

$$2b_{kk} - 1 < |\lambda| < 1.$$

Ce qui signifie que l'assertion (2.36) est valide.

3. Supposons que

$$C\Theta = \lambda\Theta.$$

Où λ est une valeur propre de la matrice C , et $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{M-1}) \neq 0$ est le vecteur propre correspondant, telle que

$$|\theta_k| = \max_{1\leq i\leq M-1} |\theta_i|,$$

alors

$$\begin{cases} -p_1\theta_1 + p_1\theta_2 & = \lambda\theta_1, \\ (p_2 - q_2)\theta_1 + (q_2 - 2p_2)\theta_2 + p_2\theta_3 & = \lambda\theta_2, \\ \quad \ddots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots & \\ (p_{M-2} - q_{M-2})\theta_{M-3} + (q_{M-2} - 2p_{M-2})\theta_{M-2} + p_{M-2}\theta_{M-1} & = \lambda\theta_{M-2}, \\ \qquad\qquad (p_{M-1} - q_{M-1})\theta_{M-2} + (q_{M-1} - p_{M-1})\theta_{M-1} & = \lambda\theta_{M-1}. \end{cases}$$

En considérant la k-ieme équation de $C\Theta = \lambda\Theta$ on a

$$\sum_{j=1}^{M-1} c_{kj}\theta_j = \lambda\theta_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, M-1,$$

donc

$$\sum_{j=1, j\neq k}^{M-1} c_{kj}\frac{\theta_j}{\theta_k} + c_{kk}\frac{\theta_k}{\theta_k} = \lambda\frac{\theta_k}{\theta_k} \quad , k = 1, 2, \ldots, M-1,$$

on obtient

$$\sum_{j=1, j\neq k}^{M-1} c_{kj}\frac{\theta_j}{\theta_k} = \lambda - c_{kk},$$

d'autre part on a

$$\left|\frac{\theta_j}{\theta_k}\right| = \frac{|\theta_j|}{|\theta_k|} < 1,$$

d'après les propriété de la valeur absolue et en utilisant Lemme 2.2, on obtient

$$|\lambda - c_{kk}| < \sum_{j=1, j\neq k}^{M-1} |c_{kj}| = -c_{kk}, \qquad \textit{pour } k = 1, 2, \ldots, M-1.$$

Alors

$$|\lambda - c_{kk}| < -c_{kk}, \qquad \textit{pour } k = 1, 2, \ldots, M-1.$$

implique que

$$c_{kk} < \lambda - c_{kk} < -c_{kk},$$

implique que

$$2c_{kk} < \lambda < 0,$$

d'où

$$|\lambda| < 2c_{kk},$$

finalement on obtient

$$|\lambda| < 2\left\|c\right\|_{\infty}.$$

Ce qui signifie que l'assertion (2.37) est valide.

□

Théorème 2.2. *([9, 11]) Le schéma de différence finie implicite définie par* (2.30) *est inconditionnellement stable.*

Démonstration. Soit $\tilde{\phi}$ une condition initiale perturbée à laquelle on associe un nouvelle solution $\tilde{U}^n$ et l'aide de système de différence linéaire (2.30) nous avons

$$\begin{cases} \tilde{U}^0 = \tilde{\phi}, \\ A\tilde{U}^1 = B\tilde{U}^0 + \mu(F^1 + \varphi), \\ A\tilde{U}^{n+1} = B\tilde{U}^n + \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} w_k C\tilde{U}^{n+1-k} + \mu(F^{n+1} + \varphi), \end{cases} \tag{2.38}$$

et soit $E^n = \tilde{U}^n - U^n$ désigne l'erreur de solution pour l'itération d'étape n et $n = 0, 1, \ldots, N-1$. En utilisant (2.30) et (2.38), on obtient

$$\begin{cases} E^0 = \tilde{\phi} - \phi, \\ AE^1 = BE^0, \\ AE^{n+1} = BE^n + \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} w_k CE^{n+1-k}, \end{cases} \tag{2.39}$$

pour montrer que $\left\|E^{n+1}\right\|_{\infty} \leq c\left\|E^0\right\|_{\infty}$, pour $n = 0, 1, \ldots, N-1$, on utilisant la récurrence
-si $n = 0$, par (2.39) on a

$$AE^1 = BE^0,$$

d'où

$$\left\|E^1\right\|_{\infty} = \left\|A^{-1}BE^0\right\|,$$

d'après les propriété de la norme matricielle on obtient

$$\left\|E^1\right\|_{\infty} \leq \left\|A^{-1}\right\|_{\infty}\left\|B\right\|_{\infty}\left\|E^0\right\|_{\infty},$$

d'autre part, de Théorème 1.2 , nous avons

$$\rho(A) \leq \left\|A\right\|_{\infty}, \qquad \text{et } \left\|B\right\|_{\infty} \leq \rho(B) + \epsilon$$

alors

$$\left\|A^{-1}\right\| \leq \rho(A^{-1}),$$

et on utilisant Proposition 2.1 on trouve

$$\left\|A^{-1}\right\| \leq \rho(A^{-1}) < 1, \qquad \text{et } \left\|B\right\|_{\infty} \leq \rho(B) + \epsilon < 1 + \epsilon,$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\left\|E^1\right\|_\infty &\leq (1+\epsilon)\left\|E^0\right\|_\infty \\ \left\|E^1\right\|_\infty &\leq c\left\|E^0\right\|_\infty,\end{aligned}$$

-supposons qu'il existe

$$\left\|E^k\right\|_\infty \leq c_1\left\|E^0\right\|_\infty, \quad \textit{pour } k=2,3,\ldots,n,$$

d'après (2.39), on a

$$AE^{n+1} = BE^n + w_2CE^{n-1} + \ldots + w_nCE^1 + w_{n+1}CE^0,$$

alors

$$E^{n+1} = A^{-1}\left(BE^n + w_2CE^{n-1} + \ldots + w_nCE^1 + w_{n+1}CE^0\right),$$

d'où

$$\left\|E^{n+1}\right\|_\infty = \left\|A^{-1}\left(BE^n + w_2CE^{n-1} + \ldots + w_nCE^1 + w_{n+1}CE^0\right)\right\|_\infty,$$

grâce à les propriété de la norme matricielle

$$\begin{aligned}\left\|E^{n+1}\right\|_\infty &\leq \left(\underbrace{\left\|A^{-1}\right\|}_{<1}\right)\left[c_1\left\|B\right\|_\infty + c_1w_2\left\|C\right\|_\infty + \ldots + c_1w_n\left\|C\right\|_\infty + c_1w_{n+1}\left\|C\right\|_\infty\right]\left\|E^0\right\|_\infty \\ &\leq \left[c_1\left\|B\right\|_\infty + c_1\left(\sum_{k=2}^{n} w_k\right)\left\|C\right\|_\infty + c_1w_{n+1}\left\|C\right\|_\infty\right]\left\|E^0\right\|_\infty \\ &\leq \left[c_1\left\|B\right\|_\infty + c_1\left(\sum_{k=0}^{n} w_k\right)\left\|C\right\|_\infty + c_1w_{n+1}\left\|C\right\|_\infty\right]\left\|E^0\right\|_\infty,\end{aligned}$$

d'après le Théorème 1.2, on obtient

$$\left\|E^{n+1}\right\|_\infty \leq \left[c_1(\rho(B)+\epsilon)_\infty + c_1\left(\sum_{k=0}^{n+1} w_k\right)(\rho(C)+\epsilon)\right]\left\|E^0\right\|_\infty,$$

et d'après le Proposition 2.1, on obtient

$$\begin{aligned}\left\|E^{n+1}\right\|_\infty &\leq \left[\underbrace{c_1(1+\epsilon)}_{c_2} + c_1\left(\sum_{k=0}^{n+1} w_k\right)\left(2\left\|c\right\|_\infty + \epsilon\right)\right]\left\|E^0\right\|_\infty, \\ &\leq \max(c2, c1)\left[1 + \left(\sum_{k=0}^{n+1} w_k\right)\left(2\left\|c\right\|_\infty + \epsilon\right)\right]\left\|E^0\right\|_\infty,\end{aligned}$$

donc

$$\left\|E^{n+1}\right\|_\infty \leq c^*\left[1 + \left(\sum_{k=0}^{n+1} w_k\right)\left(2\left\|c\right\|_\infty + \epsilon\right)\right]\left\|E^0\right\|_\infty, \tag{2.40}$$

d'autre part on a

$$\sum_{k=0}^{n+1} w_k = w_0 + \sum_{k=1}^{n} w_k + w_{n+1} = \alpha(n+1)^{\alpha-1}, \tag{2.41}$$

et

$$\begin{aligned}
\|c\|_\infty &= \max_{1\le i\le M-1} |c_{ii}| \\
&= \begin{cases} \max|c_{11}|, \\ \max\limits_{2\le i\le M-2} |c_{ii}|, \\ \max|c_{M-1M-1}|, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\mu^\alpha \|D\|_\infty}{h^2\Gamma(\alpha+1)}, \\ \dfrac{2\mu^\alpha \|D\|_\infty}{h^2\Gamma(\alpha+1)}, \\ \dfrac{\mu^\alpha \|D\|_\infty}{h^2\Gamma(\alpha+1)} \end{cases}
\end{aligned}$$

implique que

$$\|c\|_\infty \le \frac{2\mu^\alpha \|D\|_\infty}{h^2\Gamma(\alpha+1)}, \tag{2.42}$$

en remplace (2.41) et (2.42) dans (2.40), donc on obtient

$$\begin{aligned}
\left\|E^{n+1}\right\|_\infty &\le c^* \left[1 + \alpha(n+1)^{\alpha-1}\left(\frac{4\mu^\alpha \|D\|_\infty}{h^2\Gamma(\alpha+1)} + \epsilon\right)\right] \left\|E^0\right\|_\infty \\
&\le c^* \left[1 + \frac{4\alpha\mu T^{\alpha-1}\|D\|_\infty}{h^2\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\alpha\epsilon(n+1)^{\alpha-1}\mu^{\alpha-1}}{\mu^{\alpha-1}}\right] \left\|E^0\right\|_\infty \\
&\le \underbrace{c^* \left[1 + \frac{4\alpha T^\alpha \|D\|_\infty}{Nh^2\Gamma(\alpha+1)} + \alpha\epsilon N^{\alpha-1}\right]}_{=\text{constante indépendante de } n} \left\|E^0\right\|_\infty
\end{aligned}$$

alors

$$\left\|E^{n+1}\right\|_\infty \le c\left\|E^0\right\|_\infty, \qquad \textit{pour } n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

et $c > 0$ constante indépendante de n.
Ce qui signifie que le schéma de différence (2.30) est stable. □

Théorème 2.3. *([9, 11]) La solution de différence du système linéaire* (2.30) *est convergente à la solution exacte du problème* (2.1), (2.2)-(2.3) *lorsque* $h, \mu \to 0$ *pour le domaine de temps fini.*

Démonstration. Soit $e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n \quad i = 1, 2, \ldots, M-1, n = 1, 2, \ldots, N-1$, où $u(x_i, t_n)$ est la solution exacte du problème (2.6) avec (2.2)-(2.3) à point de maillage (x_i, t_n) et u_i^n est la solution de schéma de différence (2.26) aussi à (x_i, t_n) où $e^n = (e_1^n, e_2^n, \ldots, e_{M-1}^n)^T$, on remarque que $e_i^0 = u(x_i, 0) - \phi_i = 0$, donc, $e^0 = 0$. Nous avons $u_i^n = u(x_i, t_n) - e_i^n$ en le remplaçant dans (2.25) et (2.26) donc,
-pour $n = 0$

$$\begin{aligned}
&(q_i - p_i)\left[u(x_{i-1}, t_1 - e_{i-1}^1)\right] + (1 + 2p_i - q_i)\left[u(x_i, t_1) - e_i^1\right] - p_i\left[u(x_{i+1}, t_1) - e_{i+1}^1\right] \\
&\qquad = (w_1 p_i - w_1 q_i)\left[u(x_{i-1}, t_0) - e_{i-1}^0\right] + (1 + w1_1 q_i - 2w_1 p_i)\left[u(x_i, 0) - e_i^0\right] + w_1 p_i\left[u(x_{i+1}, 0) - e_{i+1}^0\right] \\
&\qquad + \mu(F_i^1 + \varphi_i),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(q_i-p_i)e_{i-1}^1+(1+2p_i-q_i)e_i^1-p_ie_{i+1}^1&=(q_i-p_i)u(x_{i-1},t_1)+(1+2p_i-q_i)u(x_i,t_1)\\&-p_iu(x_{i+1},t_1)-w_1p_iu(x_{i-1},0)-(1+w_1q_i-2w_1p_i)u(x_i,0)-w_1p_iu(x_{i+1},0)\\&-\mu(F_i^1+\varphi_i),\end{aligned}$$

-pour $n>1$

$$\begin{aligned}&(q_i-p_i)\left[u(x_{i-1},t_{n+1})-e_{i-1}^{n+1}\right]+(1+2p_i-q_i)\left[u(x_i,t_{n+1})-e_i^{n+1}\right]-p_i\left[u(x_{i+1},t_{n+1})-e_{i+1}^{n+1}\right]\\&\quad=(w_1p_i-w_1q_i)\left[u(x_{i-1},t_n)-e_{i-1}^n\right]+(1+w_1q_i-2w_1p_i)\left[u(x_i,t_n)-e_i^n\right]+w_1p_i\left[u(x_{i+1},t_{n+1})-e_{i+1}^{n+1}\right]\\&\quad+\sum_{k=2}^{n+1}w_k\Big((p_i-q_i)\left[u(x_{i-1},t_{n+1-k})-e_{i-1}^{n+1-k}\right]+(q_i-2p_i)\left[u(x_i,t_{n+1-k})-e_i^{n+1-k}\right]\\&\quad+p_i\left[u(x_{i+1},t_{n+1-k})-e_{i+1}^{n+1-k}\right]\Big)+\mu(F_i^{n+1}+\varphi_i),\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}&(q_i-p_i)e_{i-1}^{n+1}+(1+2p_i-q_i)e_i^{n+1}-p_ie_{i+1}^{n+1}=(b_1p_i-b_1q_i)e_{i-1}^n+(1+b_1q_i-2b_1p_i)e_i^n+b_1p_ie_{i+1}^{n+1}\\&\quad+\sum_{k=2}^{n+2}w_k\Big((p_i-q_i)e_{i-1}^{n+1-k}+(q_i-2p_i)e_i^{n+1-k}+p_ie_{i+1}^{n+1-k}\Big)+(q_i-p_i)u(x_{i-1},t_{n+1})\\&\quad+(1+2p_i-q_i)u(x_i,t_{n+1})-p_iu(x_{i+1},t_{n+1})-(w_1p_i-w_1q_i)u(x_{i-1},t_n)-(1+w_1q_i-2w_1p_i)u(x_i,t_n)\\&\quad-w_1p_iu(x_{i+1},t_n)-\sum_{k=2}^{n+1}w_k\left[(p_i-q_i)u(x_{i-1},t_{n+1-k})+(q_i-2p_i)u(x_i,t_{n+1-k})+p_iu(x_{i+1},t_{n+1-k})\right]\\&\quad-\mu(F_i^{n+1}+\varphi_i),\end{aligned}$$

Soit $R^n=(R_1^n,R_2^n,\dots,R_{M-1}^n)^T$, une erreur de troncature dans l'approximation des solution pour $n=1,2,\dots,N$, on a $e_0^{n+1}=e_0^{n+1}$ et $e_M^{n+1}=e_{M-1}^{n+1}$, et en utilisant le système de différence linéaire (2.30) , nous avons

$$\begin{cases}Ae^1=R^1,\\Ae^{n+1}=Be^n+\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}w_kCe^{n+1-k}+R^{n+1}.\end{cases}\tag{2.43}$$

Où, pour $n=0,1,\dots,N-1$ et les matrices A,B et C sont définies par (2.27), (2.28) et (2.29) respectivement.

$$\begin{aligned}R_i^{n+1}&=(q_i-p_i)u(x_{i-1},t_{n+1})+(1+2p_i-q_i)u(x_i,t_{n+1})-p_iu(x_{i+1},t_{n+1})-(w_1p_i-w_1q_i)u(x_{i-1},t_n)\\&-(1+w_1q_i-2w_1p_i)u(x_i,t_n)-w_1p_iu(x_{i+1},t_n)-\sum_{k=2}^{n+1}w_k\left[(p_i-q_i)u(x_{i-1},t_{n+1-k})\right.\\&\left.+(q_i-2p_i)u(x_i,t_{n+1-k})+p_iu(x_{i+1},t_{n+1-k})\right]-\mu(F_i^{n+1}+\varphi_i)\\&=u(x_i,t_{n+1})-u(x_i,t_n)-\frac{(D_i-D_{i-1})\mu^\alpha}{h^2\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n+1}w_k\left[u(x_i,t_{n+1-k})-u(x_{i-1},t_{n+1-k})\right]\\&-\frac{D_i\mu^\alpha}{h^2\Gamma(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n+1}w_k\left[u(x_{i+1},t_{n+1-k})-2u(x_i,t_{n+1-k})+u(x_{i-1},t_{n+1-k})\right]\\&-\mu F(x_i,t_{n+1})-\mu\varphi(x_i).\end{aligned}$$

Par les expressions approximatives (2.15),(2.16), (2.18) et (2.19) on obtient

$$R_i^{n+1} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{n+1}) - \varphi(x_i) - \frac{dD}{dx}(x_i) \sum_{k=0}^{n+1} w_k \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{n+1}) \right.$$
$$\left. -D(x_i) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{n1}) b_k - F(x_i, t_{n+1}) \right],$$

et d'après Lemme2.1 on obtient

$$R_i^{n+1} = \mu \left[\mathcal{I}_t^{\alpha-1} \left({}^C\mathcal{D}_t^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{n+1}) \right) - \frac{dD}{dx}(x_i) \mathcal{I}_t^{\alpha-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{n+1}) \right) - D(x_i) \right.$$
$$\left. \mathcal{I}_t^{\alpha-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{n+1}) \right) - \mathcal{I}_t^{\alpha-1} f(x_i, t_{n+1}) + o(h^2 + \mu) \right],$$

d'après l'équation(2.7) on trouve

$$R_i^{n+1} = \mu o(h^2 + \mu),$$

ce qui implique que il existe une constante $M^* > 0$ telle que

$$\left\| R^{n+1} \right\|_\infty \leq M^* \mu (h^2 + \mu), \quad \textit{pour } n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{2.44}$$

Maintenant on montre que

$$\left\| e^{n+1} \right\|_\infty \leq M^* (\mu h^2 + \mu^2), \qquad n = 0, 1, \ldots, N,$$

on utilise la démonstration par récurrence
-si $n = 0$, par (2.43) on a

$$e^1 = A^{-1} R^1,$$

alors

$$\begin{aligned} \left\| e^1 \right\|_\infty &\leq \left\| A^{-1} \right\|_\infty \left\| R^1 \right\|_\infty \\ &< \left\| R^1 \right\|_\infty, \end{aligned}$$

et d'après (2.44)

$$\left\| e^1 \right\|_\infty < M^* \mu (h + \mu^2),$$

-supposons que

$$\left\| e^k \right\|_\infty \leq M^* \mu (h^2 + \mu), \quad \text{pour } k = 2, 3, \ldots, n, \text{où } M^* > 0 \text{ indépendante de h et } \mu \tag{2.45}$$

d'après (2.43) on a

$$A e^{n+1} = B e^n + \sum_{k=2}^{n+1} w_k C e^{n+1-k} + R^{n+1},$$

alors,

$$e^{n+1} = A^{-1} \left(B e^n + \sum_{k=2}^{n+1} w_k C e^{n+1-k} + R^{n+1} \right),$$

grâce a la propriété de la norme matricielle

$$\begin{aligned}\left\|e^{n+1}\right\|_\infty &\leq \|B\|_\infty \|e\|_\infty + \sum_{k=2}^{n+1} w_k \|C\|_\infty \left\|e^{n+1-k}\right\|_\infty + \left\|R^{n+1}\right\|_\infty \\ &\leq \|B\|_\infty \|e\|_\infty + \sum_{k=0}^{n+1} w_k \|C\|_\infty \left\|e^{n+1-k}\right\|_\infty + \left\|R^{n+1}\right\|_\infty\end{aligned}$$

d'après (2.41) et (2.45)

$$\left\|e^{n+1}\right\|_\infty \leq \left[\|B\|_\infty + \alpha(n+1)^{\alpha-1} \|C\|_\infty + 1\right] M^* \mu \left(h^2 + \mu\right),$$

d'après le Théorème 1.2

$$\left\|e^{n+1}\right\|_\infty \leq \left[(\rho(B)+\epsilon) + \alpha(n+1)^{\alpha-1} (\rho(C)+\epsilon) + 1\right] M^* \mu (h^2+\mu),$$

et d'après le Proposition 2.1 et (2.42)

$$\left\|e^{n+1}\right\|_\infty \leq \left[2 + \epsilon + \frac{4\alpha(n+1)^{\alpha-1} \|D\|_\infty \mu^\alpha}{h^2 \Gamma(\alpha+1)} + \alpha(n+1)^{\alpha-1}\epsilon\right] M^* \mu (h^2+\mu),$$

et on a $\quad (n+1)^{\alpha-1}\mu^{\alpha-1} = t_{n+1}^{\alpha-1} \leq T^{\alpha-1}$,
et $\quad t_N = T = N\mu \Rightarrow \mu = \dfrac{T}{N}$,
et $\quad x_M = L = Mh \Rightarrow h = \dfrac{L}{M}$, donc, on trouve

$$\left\|e^{n+1}\right\|_\infty \leq \underbrace{\left[(2+\epsilon) + \frac{4\alpha T^\alpha M^2 \|D\|_\infty}{NL\Gamma(\alpha+1)} + \alpha\epsilon N^{\alpha-1}\right] M^*}_{= \text{ constante indépendante de } h \text{ et } \mu} (\mu h^2 + \mu^2),$$

ce qui implique que l'affirmation du théorème est valide. □

2.2.2 Algorithme

Algorithme de Thomas

Initialisation :
M, N, L, T
$h = L/M$
$\mu = T/N$
pour $i = 1, 2, \ldots, M-2$
$d_i = 1 + 2p_i - q_i$
$d_{M-1} = 1 + p_{M-1} - q_{M-1}$
pour $i = 1, 2, \ldots, M-2$
$\alpha_i = -p_i$
pour $i = 2, 3, M-1$
$\beta_i = q_i - p_i$
pour $n = 0$
$G^0 = BU^0 + \mu(F^1 + \varphi)$
pour $n > 0$
$G^n = BU^n + \sum_{k=2}^{n+1} w_k C U^{n+1-k} + \mu(F^{n+1} + \varphi)$

Triangularisation :
$d_1^{'} = d_1, G_1^{'n} = G_1^n$, pour $n \geq 0$
pour $i = 2, 3, M-1$
$d_i^{'} = d_i - \alpha_{i-1} \times \dfrac{\beta_i}{d_{i-1}^{'}}$
$G_i^{n'} = G_i^n - G_{i-1}^{'n} \times \dfrac{\beta_i}{d_{i-1}^{'}}$, pour $n \geq 0$
Résolution :
$u_{M-1}^{n+1} = \dfrac{G_{M-1}^{'n}}{d_{M-1}^{'}}$, pour$n \geq 0$
pour$i = M-2, \ldots, 1$
$u_i^{n+1} = \dfrac{G_i^{'n} - \alpha_i u_{i+1}^{n+1}}{d_i^{'}}$, pour $n \geq 0$
écrire U^{n+1}
Stop

2.2.3 Exemple numérique

Dans cette sous-section, nous allons présenter un exemple pour montre la convergence numérique de schème de différence (2.30).
Dans l'équation (2.1), soient $\alpha = 1.6$ le coefficient de diffusion-onde $D(x) = 1 + x$, le terme source $f(x,t) = \dfrac{2x^2(1-x)^2 t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - (1+t^2)(16x^3 - 6x^2 - 8x + 2)$,$L = 1, T = 1$, les condition initiales (2.2) $\phi(x) = x^2(1-x)^2$ et $\varphi(x) = 0$, et la solution exacte de problème directe $u(x,t) = (1+t^2)x^2(1-x)^2$.
En utilisant **Matlab** nous avons représente la solution numérique et la solution exacte du problème direct au temps de $t = 0, t = 0.002, t = 0.001$ et $t = 0.0015$ dans le Figure 2.2.3 , avec $M = 20$ et $N = 2000$. De Figure 2.2.3 nous concluons que le schéma de différence finie (2.30) est converge.

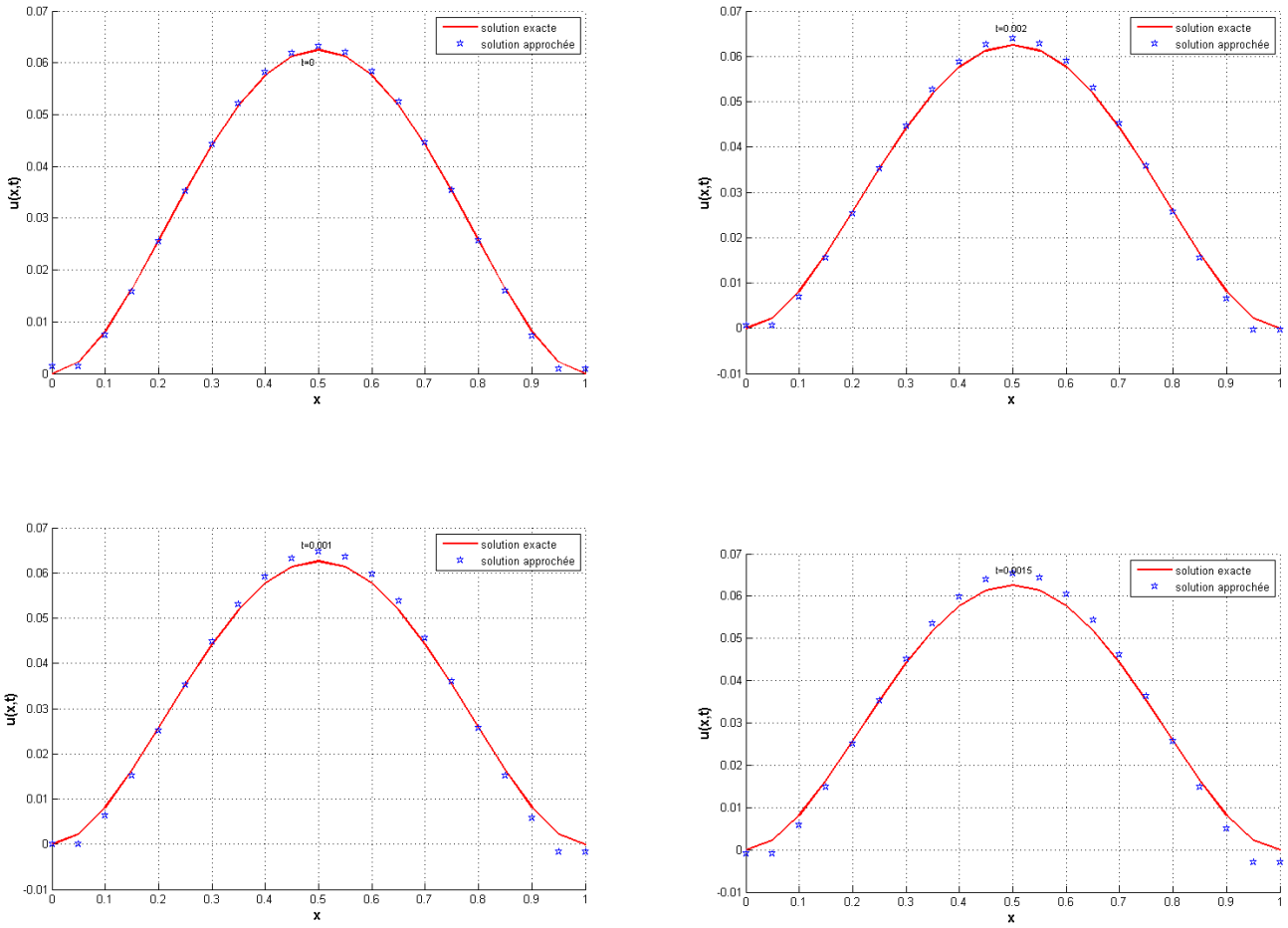

FIGURE 2.1 – solution exacte et approché

CHAPITRE 3

PROBLÈME INVERSE

Dans ce chapitre, nous avons présenté un algorithme d'inversion numérique basé sur la méthode des moindres carrés avec régularisation d'Homotopie pour déterminer numériquement le coefficient de diffusion-onde dans un espace approximatif différent, et des inversions numériques sont effectuées par deux exemples numériques. Cet algorithme d'inversion est efficace au moins pour ce problème inverse.

3.1 Position du problème

Si le coefficient de diffusion-onde $D(x)$ est inconnu, nous le cherchons par des observations supplémentaires à la limite à droite à $x = L$, i.e.,

$$u(L,t) = \psi(t), \qquad 0 < t \leq T, \tag{3.1}$$

ainsi un problème inverse est formule par l'équation de diffusion-onde fractionnaire (2.1), les conditions initiales et les conditions aux limites (2.2)-(2.3) avec une condition supplémentaire (3.1). Pour la solution de se problème inverse, supposons que la fonction $D(x)$ est une fonction continue sur $[0, L]$.
Soit V un sous espace de $C([0, L])$ de dimension fini s, et $\{\eta_i(x)\}_{i=1}^{s}$ une base de V, i.e.
$\eta_i(x) = \{1, x, \ldots, x^s\}$, on peut écrire le coefficient de diffusion-onde $D(x)$ sous la forme d'un combinaisons de la base de le sous espace V ([10]), i.e.,

$$D(x) = \sum_{i=0}^{s} p_i \eta_i(x). \tag{3.2}$$

Pour tout $D(x)$ une solution unique de problème direct correspondant, désigné par $u(x, t; D)$ peut être élaborée par le schéma de différence finie (2.30), alors $u(x, t; D)$ est obtenu .
Par conséquent, obtenir un coefficient de diffusion-onde D équivaut à trouver un vecteur P, ce qui signifie que nous pouvons dire $u(L, t; D) = u(L, t; P)$. Où

$$P = (p_0, p_1, \ldots, p_s)^T.$$

Soit $E > 0$ on note $S_E = \{p \in \mathbb{R}^s : \|p\|_2 \leq E\}$, l'ensemble admissible d'inconnus p

3.2 Problème de moindres carrés non linéaire

Pour résoudre le problème inverse on résoudre un problème de moindres carrés non linéaire suivant

$$\min_P \Phi(P). \tag{3.3}$$

Où

$$\Phi(P) = \|u(L, t; P) - \psi(t)\|_2^2, \qquad 0 < t \leq T. \tag{3.4}$$

La fonction objective Φ continue et convexe sur l'ensemble S_E ferme et bornée, donc d'après le **Théorème de Weierstrass** le problème (3.3) admet au moins une solution.
D'autre part le problème (3.3) est mal pose de sorte que le problème admet plusieurs solutions , pour l'unicité, en utilisant la régularisation d' **Homotopie**.

3.2.1 Régularisation d'Homotopie

On considéré le problème régularisée suivant

$$\min_P \Phi_\lambda(P). \tag{3.5}$$

Où

$$\Phi_\lambda(P) = (1 - \lambda) \|u(L, t; P) - \psi(t)\|_2^2 + \lambda \|P\|_2^2, \tag{3.6}$$

telle que $0 < \lambda < 1$ est le paramètre de régularisation .
Maintenant, pour obtenir D^j, on suppose que

$$D^{j+1} = D^j + \delta D^j, \qquad j = 0, 1, \ldots.$$

Où

$$j \quad \text{est le nombre d'itération}$$

$$\delta D^j \quad \text{désigne une perturbation de} D^j.$$

D'après (3.2) nous avons

$$D^j(x) = \sum_{i=0}^{s} p_i^j \eta_i^j(x),$$

et

$$\delta D^j(x) = \sum_{i=0}^{s} \delta p_i^j \eta_i^j(x).$$

Où δp^j désigne une perturbation pour p^j donné.
Ainsi, pour obtenir p^{j+1} à partir de p^j donné, il suffit d'obtenir une perturbation δp^j.

$$P^{j+1} = P^j + \delta P^j, \qquad j = 0, 1, \ldots. \tag{3.7}$$

En suite, nous avons seulement besoin de déterminer un vecteur de perturbation

$$\delta P^j = (\delta p_0^j, \delta p_1^j, \ldots, \delta p_s^j)^T. \tag{3.8}$$

Dans la suite, pour facilite l'écriture, P^j et δP^j sont abrégés en P et δP, respectivement.

3.2.2 problème linéaire

Nous avons la solution direct $u(L, t; P + \delta P)$est dépend de P implicitement, donc avec le développement de Taylor à d'ordre un on trouve

$$u(L, t; P + \delta P) \approx u(L, t; P) + \nabla_P^T u(L, t; P).\delta P. \tag{3.9}$$

en utilisant (3.4) on obtient

$$\Phi(P + \delta P) = \|u(L, t; P + \delta P) - \psi(t)\|_2^2.$$

Avec (3.6), la fonction objective de moindres carrés devient

$$F_\lambda(\delta P) = (1 - \lambda) \left\|\nabla_P^T u(L, t; P).\delta P - (\psi(t) - u(L, t; P))\right\|_2^2 + \lambda \|\delta P\|_2^2. \tag{3.10}$$

Nous discrétisons le domaine $[0, T]$ par $t_n (n = 1, 2, \ldots, N)$ et $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$. Par la méthode de différence finie, nous avons

$$\nabla_P^T u(L, t_n; P).\delta P \approx \sum_{i=0}^{s} \frac{u(L, t_n; (p_0, \ldots, p_i + \tau, \ldots, p_s)) - u(L, t_n; p)}{\tau}.\delta p_i \tag{3.11}$$

pour $n = 1, 2, \ldots, N$, où τ est un pas différentiel numérique.
D'où, on définit la matrice

$$H = (h_{ni})_{N\times(s+1)}.$$

Où

$$h_{ni} = \frac{u(L, t_n; (p_0, \ldots, p_i + \tau, \ldots, p_s)) - u(L, t_n; p)}{\tau}.$$

Donc

$$H = \begin{pmatrix} h_{10} & h_{11} & \cdots & h_{1s} \\ h_{20} & h_{21} & \cdots & h_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N0} & h_{N1} & \cdots & h_{Ns} \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Soit

$$\begin{aligned} U &= (u(L, t_1; p), u(L, t_2; p), \ldots, u(L, t_N; p))^T, \\ \Psi &= (\psi(t_1), \psi(t_2), \ldots, \psi(t_N))^T. \end{aligned} \tag{3.13}$$

En utilisant (3.11), (3.12) et (3.13) on peut écrire (3.10) sous la forme suivante

$$F_\lambda(\delta P) = (1-\lambda)\left\|H\delta P - (\Psi - U)\right\|_2^2 + \lambda\left\|\delta P\right\|_2^2. \tag{3.14}$$

Lemme 3.1. *([1, 10]) δP^λ un minimum de F_λ si est seulement si δP^λ résout l'équation normale suivante*

$$(1-\lambda)H^T H\delta P^\lambda + \lambda\delta P^\lambda = H^T(\Psi - U). \tag{3.15}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} F_\lambda(\delta P) - F_\lambda(\delta P^\lambda) &= \left((1-\lambda)\left\|H\delta P - (\Psi - U)\right\|_2^2 + \lambda\left\|\delta P\right\|_2^2\right) - \left((1-\lambda)\left\|H\delta P^\lambda - (\Psi - U)\right\|_2^2 + \lambda\left\|\delta P^\lambda\right\|_2^2\right) \\ &= \left((1-\lambda)\left\|H\delta P\right\|_2^2 + (1-\lambda)\left\|\Psi - U\right\|_2^2 - 2(1-\lambda) < H\delta P, \Psi - U > + \lambda\left\|\delta P\right\|_2^2\right) \\ &- \left((1-\lambda)\left\|H\delta P^\lambda\right\|_2^2 + (1-\lambda)\left\|\Psi - U\right\|_2^2 - 2(1-\lambda) < H\delta P^\lambda, \Psi - U > + \lambda\left\|\delta P^\lambda\right\|_2^2\right) \\ &= (1-\lambda)\left\|H(\delta P - \delta P^\lambda)\right\|_2^2 - 2(1-\lambda)\left\|H\delta P^\lambda\right\|_2^2 + 2(1-\lambda) < H\delta P, H\delta P^\lambda > \\ &- 2(1-\lambda) < H\delta P, \Psi - U > + 2(1-\lambda) < H\delta P^\lambda, \Psi - U > + \lambda\left\|\delta P - \delta P^\lambda\right\|_2^2 \\ &- 2\lambda\left\|\delta P^\lambda\right\|_2^2 + 2\lambda < \delta P, \delta P^\lambda > \\ &= 2(1-\lambda) < H\delta P^\lambda - (\Psi - U), H(\delta P - \delta P^\lambda) > + 2\lambda < \delta P^\lambda, \delta P - \delta P^\lambda > \\ &+ (1-\lambda)\left\|H(\delta P - \delta P^\lambda)\right\|_2^2 + \lambda\left\|\delta P - \delta P^\lambda\right\|_2^2 \\ &= 2(1-\lambda) < H^T(H\delta P^\lambda - (\Psi - U)) + \alpha\delta P^\lambda, \delta P - \delta P^\lambda > + (1-\lambda)\left\|H(\delta P - \delta P^\lambda)\right\|_2^2 \\ &+ \lambda\left\|\delta P - \delta P^\lambda\right\|_2^2. \end{aligned}$$

Pour tout $\delta P, \delta P^\lambda \in S_E$. Si δP^λ satisfait (3.15) puis $F_\lambda(\delta P) - F_\lambda(\delta P^\lambda) \geq 0$, alors δP^λ minimise (3.14) d'autre part, si δP^λ minimise (3.14), choisissons $\delta P = \delta P^\lambda - tZ$ pour tout $t > 0$ et $Z \in S_E$.
on a

$$F_\lambda(\delta P) - F_\lambda(\delta P^\lambda) \geq 0,$$

donc

$$2t < (1-\lambda)H^T(H\delta P^\lambda - (\Psi - U)) + \lambda\delta P^\lambda, Z > +t^2(1-\lambda)\left\|HZ\right\|_2^2 + \lambda t^2\left\|Z\right\|_2^2 \geq 0,$$

diviser par $t > 0$, et quand $t > 0$ on obtient

$$< (1-\lambda)H^T(H\delta P^\lambda - (\Psi - U)) + \lambda\delta P^\lambda, Z > \geq 0, \qquad \text{pour tout } Z \in S_E,$$

si on choisir $Z = -((1-\lambda)H^T(H\delta P^\lambda - (\Psi - U)) + \lambda\delta P^\lambda)$, nous obtenons

$$< (1-\lambda)H^T(H\delta P^\lambda - (\Psi - U)) + \lambda\delta P^\lambda, -((1-\lambda)H^T(H\delta P^\lambda - (\Psi - U)) + \lambda\delta P^\lambda) > \geq 0,$$

d'où

$$-\left\|(1-\lambda)H^T(H\delta P^\lambda - (\Psi - U)) + \lambda\delta P^\lambda\right\|_2^2 \geq 0,$$

alors

$$\left\|(1-\lambda)H^T(H\delta P^\lambda - (\Psi - U)) + \lambda\delta P^\lambda\right\|_2^2 \leq 0,$$

implique que

$$(1-\lambda)H^T(H\delta P^\lambda - (\Psi - U)) + \lambda\delta P^\lambda = 0,$$

ce qui signifie que δP^λ résout l'équation normale (3.15). □

3.2.3 Résultat d'existence

Théorème 3.1. *([1]) Il existe au moins $\delta P^\lambda \in S_E$ point de minimum de la fonction F_λ .*

Démonstration. Soit $(\delta P_n) \in S_E$ une suite minimisante, i.e., $F_\lambda(\delta P_n) \to I = \inf_{\delta P \in S_E} F_\lambda(\delta P)$ quand n tend vers l'infini, on montre que (δP_n) est une suite de Cauchy

$$\begin{aligned}
F_\lambda(\delta P_n) + F_\lambda(\delta P_m) &= \Big((1-\lambda)\left\|H\delta P_n - (\Psi - U)\right\|_2^2 + \lambda\left\|\delta P_n\right\|_2^2\Big) + \Big((1-\lambda)\left\|H\delta P_m - (\Psi - U)\right\|_2^2 + \lambda\left\|\delta P_m\right\|_2^2\Big) \\
&= (1-\lambda)\left\|H\delta P_n\right\|_2^2 + (1-\lambda)\left\|\Psi - U\right\|_2^2 - 2(1-\lambda) < H\delta P_n, \Psi - U > +\lambda\left\|\delta P_n\right\|_2^2 \\
&+ (1-\lambda)\left\|H\delta P_m\right\|_2^2 + (1-\lambda)\left\|\Psi - U\right\|_2^2 - 2(1-\lambda) < H\delta P_m, \Psi - U > +\lambda\left\|\delta P_m\right\|_2^2 \\
&= (1-\lambda)\left\|H\delta P_n\right\|_2^2 + 2(1-\lambda)\left\|\Psi - U\right\|_2^2 - 2(1-\lambda) < H\delta(P_n - \delta P_m), \Psi - U > +\lambda\left\|\delta P_n\right\|_2^2 \\
&+ \lambda\left\|\delta P_m\right\|_2^2 + (1-\lambda)\left\|H\delta P_m\right\|_2^2 .
\end{aligned}$$

Nous avons

$$(1-\lambda)\left(\left\|H\delta P_n\right\|_2^2 + \left\|H\delta P_m\right\|_2^2\right) = \frac{(1-\lambda)}{2}\left(\left\|H(\delta P_n + \delta P_m)\right\|_2^2 + \left\|H(\delta P_n - \delta P_m)\right\|_2^2\right)$$

et

$$\lambda\left(\left\|\delta P_n\right\|_2^2 + \left\|\delta P_m\right\|_2^2\right) = \frac{\lambda}{2}\left(\left\|\delta P_n + \delta P_m\right\|_2^2 + \left\|\delta P_n - \delta P_m\right\|_2^2\right).$$

D'où

$$\begin{aligned}
F_\lambda(\delta P_n) + F_\lambda(\delta P_m) &= \frac{(1-\lambda)}{2}\left\|H(\delta P_n + \delta P_m)\right\|_2^2 + 2\left\|\Psi - U\right\|_2^2 - 2(1-\lambda) < H(\delta P_n + \delta P_m), \Psi - U > \\
&+ \frac{(1-\lambda)}{2}\left\|\delta P_n + \delta P_m\right\|_2^2 + \frac{(1-\lambda)}{2}\left\|H(\delta P_n - \delta P_m)\right\|_2^2 + \frac{\lambda}{2}\left\|\delta P_n - \delta P_m\right\|_2^2 ,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

d'autre part on a

$$\begin{aligned}
2F_\lambda\left(\frac{1}{2}(\delta P_n+\delta P_m)\right) &= 2(1-\lambda)\left\|H(\frac{1}{2}(\delta P_n+\delta P_m))-(\Psi-U)\right\|_2^2+2\lambda\left\|\frac{1}{2}(\delta P_n+\delta P_m)\right\|_2^2\\
&= \frac{(1-\lambda)}{2}\left\|H(\delta P_n+\delta P_m)-2(\Psi-U)\right\|_2^2+\frac{\lambda}{2}\left\|\delta P_n+\delta P_m\right\|_2^2\\
&= \frac{(1-\lambda)}{2}\left(\left\|H(\delta P_n+\delta P_m)\right\|_2^2+2(1-\lambda)\left\|\Psi-U\right\|_2^2-2(1-\lambda)<H(\delta P_n+\delta P_M),\Psi-U>\right)\\
&+\frac{\lambda}{2}\left\|\delta P_n+\delta P_m\right\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

En remplaçant (3.17) dans (3.16) on obtient

$$\begin{aligned}
F_\lambda(\delta P_n)+F_\lambda(\delta P_m) &= 2F_\lambda\left(\frac{1}{2}(\delta P_n+\delta P_m)\right)+\frac{(1-\lambda)}{2}\left\|H(\delta P_n+\delta P_m)\right\|_2^2+\frac{\lambda}{2}\left\|\delta P_n+\delta P_m\right\|_2^2\\
&\geq 2I+\frac{\lambda}{2}\left\|\delta P_n+\delta P_m\right\|_2^2.
\end{aligned}$$

On a $F_\lambda(\delta P_n)+F_\lambda(\delta P_m)\to 2I$ quand n tend vers l'infini
donc

$$\|\delta P_n-\delta P_m\|_2^2\leq 0.$$

Ceci montre que (δP_n) est une suite de Cauchy et donc convergente puisque le sous espace S_E est ferme dans complet $\mathbb{R}^s$.
Soit $\delta P^\lambda=\lim\limits_{n\to+\infty}\delta P_n$, nous avons $\delta P^\lambda\in S_E$, et de la continuité de F_λ, nous concluons que $F_\lambda(\delta P_n)\to F_\lambda(\delta P^\lambda)$, alors $F_\lambda(\delta P^\lambda)=I$. Cela preuve l'existence d'un minimum de F_λ. □

3.2.4 Résultat d'unicité

Corollaire 3.1. *([1]) F_λ admet un minimum unique $\delta P^\lambda\in S_E$. Ce minimum δP^λ est la solution unique de l'équation normale.*

$$(1-\lambda)H^TH\delta P^\lambda+\lambda\delta P^\lambda=H^T(\Psi-U).$$

Démonstration. Il suffit de montre que l'équation normale admet une solution unique parce que nous avons un équivalente entre (3.14) et (3.15).
Nous avons l'équation normale

$$((1-\lambda)H^TH+\lambda I)\delta P^\lambda=H^T(\Psi-U),$$

pour montre que cette équation admet une solution unique, il doit montrer que la matrice $(1-\lambda)H^TH+\lambda I)$ est définie positive . Alors, $\forall\delta P\neq 0$

$$\begin{aligned}
<((1-\lambda)H^TH+\lambda\delta P)\delta P,\delta P> &=<\lambda\delta P,\delta P>+<(1-\lambda)H^TH\delta P,\delta P>\\
&=\lambda\left\|\delta P\right\|_2^2+(1-\lambda)\left\|H\delta\delta P\right\|_2^2.
\end{aligned}$$

On a

$$\|H\delta P\|_2^2\geq 0,$$

et

$$\|\delta P\|_2^2 > 0,$$

donc

$$\lambda \|\delta P\|_2^2 + (1-\lambda) \|H\delta P\|_2^2 > 0,$$

alors

$$< ((1-\lambda)H^T H + \lambda\delta P)\delta P, \delta P >> 0.$$

Cela preuve que la matrice $((1-\lambda)H^T H+\lambda I)$ est définie positive donc inversible implique que l'équation (3.15) admet une solution unique , alors, nous concluons que F_λ admet un minimum unique.
Par conséquent, une perturbation peut être déterminer (3.15)

$$\delta P^\lambda = ((1-\lambda)H^T H + \lambda I)^{-1} H^T (\Psi - U). \tag{3.18}$$

Ainsi, une solution optimale peut être approchée par la procédure d'itération (3.7) tant que le nombre d'itération est atteint, on que la perturbation satisfait à une précision convergente prescrite donnée par

$$\left\|\delta P^\lambda\right\|_2^2 \leq \epsilon.$$

Où ϵ est une perturbation convergente donnée □

3.3 Algorithme d'inversion

Étape01 : Donne l'itération initiale P, et le pas différentiel numérique τ, et la précision de convergente ϵ, et la condition supplémentaire $\psi(t)$;

Étape02 : Résoudre le problème directe par le système linéaire (2.30), obtenir $u(L, t_n; P)$ et $u(L, t_n; (p_0, \ldots, p_i + \tau, \ldots, p_s))$,

pour $n = 1, 2, \ldots, N$ et $i = 0, 1, \ldots, s$,
puis obtenir le vecteur U, et la matrice H par la formule (3.12) ;

Étape03 : Choisir un paramétré de régularisation approprie $0 < \lambda < 1$, et obtenir un vecteur de perturbation δP^λ par la formule (3.18), puis obtenir δD ;

Étape04 : S' il y a $\left\|\delta P^\lambda\right\|_2 \leq \epsilon$, alors l'algorithme d'inversion est termine, et $D + \delta D$ considérer comme la solution que nous voulons juste déterminer ;
Sinon, passe à **l'étape02** en remplace P par δP.

3.4 Inversion numérique

Dans cette section on prend, les conditions initiales $\phi(x) = x^2(1-x)^2$ et $\varphi(x) = 0$
et le terme source $f(x,t) = \dfrac{2x^2(1-x)^2 t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - (1+t^2)(16x^3 - 6x^2 - 8x + 2)$, $T = 1, L = 1$
le nombre de grilles spatiales $M = 20$ et le nombre de grilles de temps $N = 20$.

3.4.1 Exemple01 :fonction linéaire

Dans cette exemple, nous allons prendre une fonction linéaire

$$D(x) = 1 + x, \qquad 0 \leq x \leq 1,$$

comme le coefficient de diffusion-onde exacte, Nous avons réalise l'algorithme d'inversion on utilisant la formule (3.18). En choisissant le paramètre de régularisation $\lambda = 0.01$, l'itération initiale $P^0 = (1, 1)$, le pas différentielle numérique $\tau = 0.4$, la précision convergente $\epsilon = 1e-6$, et l'ordre fractionnaire $\alpha = 1.8$. Le coefficient de onde et leur inversion sont représentés dans Figure 3.4.1

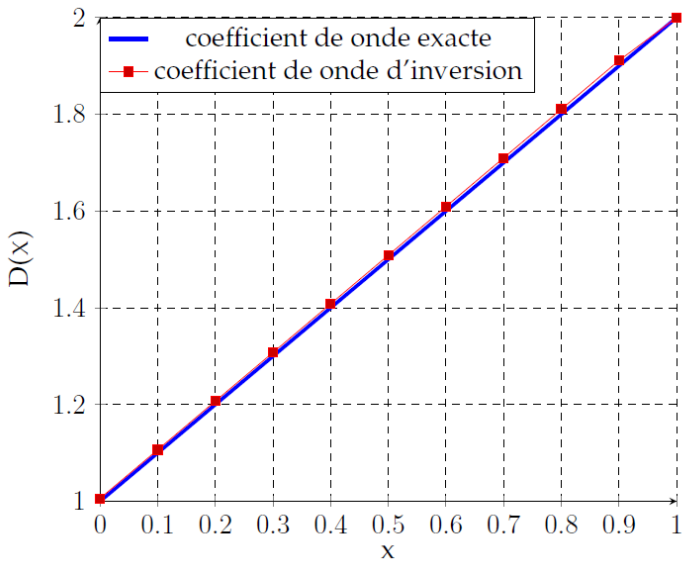

FIGURE 3.1 – coefficient de diffusion-onde affine et leur inversion

On prend, les conditions initiales $\phi(x) = \sin(\pi x)$ et $\varphi(x) = 0$
et le terme source $f(x,t) = \dfrac{2\sin(\pi x)t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - 2\pi x(1+t^2)\cos(\pi x) + \pi^2(1+t^2)(1+x^2)\sin(\pi x)$, $T = 1, L = 1$ le nombre de grilles spatiales $M = 20$ et le nombre de grilles de temps $N = 1000$.

3.4.2 Exemple02 :fonction de seconde ordre

Dans cet exemple, nous allons prendre une fonction du second ordre

$$D(x) = 1 + x + x^2, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

comme le coefficient de diffusion-onde exact. Nous avons réalisé l'algorithme d'inversion en utilisant la formule (3.18). En choisissant le paramètre de régularisation $\lambda = 1e - 10$, l'itération initiale $P^0 = (1; 0.66; 1.44)$, le pas différentiel numérique $\tau = 0 : 5$, la précision convergente $\epsilon = 1e - 7$ et l'ordre fractionnaire $\alpha = 1.5$. Le coefficient de onde et leur inversion sont représentés dans Figure 3.4.2

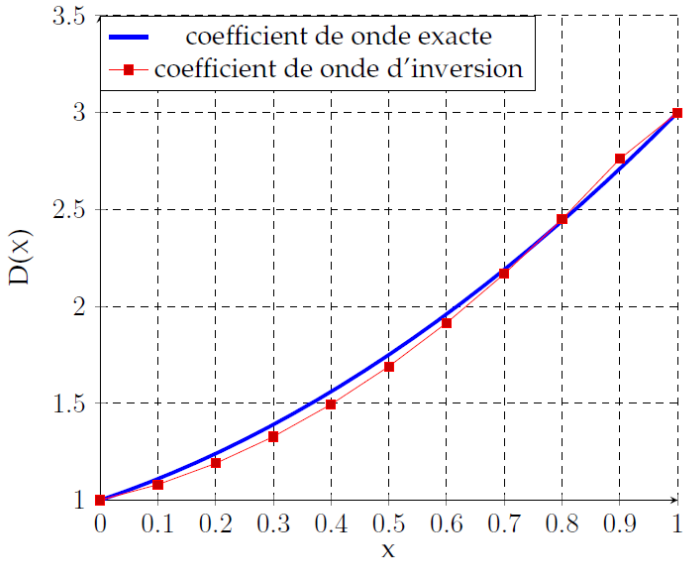

FIGURE 3.2 – coefficient de onde quadratique et leur inversion

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse pour déterminer numériquement un coefficient de diffusion-onde dépendant de l'espace dans une équation de diffusion-onde fractionnaire de Caputo définie dans un milieu hétérogène avec conditions aux limites de Neumann homogènes et une condition supplémentaire au point $x = L$. Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **Problème direct** : nous avons introduit un schéma de différence implicite pour le problème direct basé sur la discrétisation d'une équation intégro-différentielle équivalente et l'interpolation linéaire de Lagrange, et la stabilité et la convergence de cet schéma sont prouvées en utilisant l'analyse matricielle, et un exemple numérique et présenté.
- ✓ **Problème inverse** : nous avons proposé un algorithme d'inversion basé sur la méthode des moindres carrés avec régularisation d'Homotopie pour résoudre le problème inverse (2.1)-(3.1), et des inversions numériques sont effectuées par des exemples numériques pour montrer que l'algorithme d'inversion proposé est efficace et stable.

Comme perspectives, nous avons le problème ouvert suivant :

- ☞ Étude d'un problème inverse pour une équation de diffusion-onde fractionnaire avec condition de type intégrale suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t), & 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x), & 0 \le x \le 1, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & 0 \le t \le T, \\ \int_0^1 u(x,t)\,dx = E(t), & 0 \le t \le T. \end{cases}$$

où ${}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(x,t)$ est la dérivée de Caputo d'ordre $1 < \alpha < 2$ définie par :

$${}^{C}\mathcal{D}_t^{\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u(x,s)}{\partial s^2} ds.$$

Bibliographie

[1] Kirsch A. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer-Verlag, 1996.

[2] Ziane A. Étude d'un problème inverse pour une équation de diffusion fractionnaire. Master's thesis, Université Mohamed Boudiaf de M'sila, Algérie, 2018.

[3] Kilbas A.A., Srivastava H.M., and Trujllo J.J. *THEORY AND APPLICATIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*. ELSEVIER, 2006.

[4] Bolley C. *Analyse numérique*. École Cntrale de Nantes, 2012.

[5] Philip J. D. and Philip R. and. *Methods of numerical integration*. Academic press, Inc, 1983.

[6] Zhang D., Li G., Jia X., and Li H. Simultaneous inversion for space-dependent diffusion coefficient and source magnitude in the time fractional diffusion equation. *Journal of Mathematics Research*, 5, 2013.

[7] M. D'Elia and Gunzburger M. Identification of the diffusion parameter in nonlocal steady diffusion problems. *Appl. Math. Optim.*, 73(2) :227–249, 2016.

[8] X. Jia D.Zhang, G. Li and H. Li. Simultaneous inversion for the space-dependent diffusion coefficient and the fractional order in the time-fractional diffusion equation. *Inverse Probl.*, 29(6) :065014, 2013.

[9] Allaire G. *Analyse Numérique et optimisation*. Paris, Janvier 2005.

[10] Chi G., Li G., Sun Ch., and Jia X. Numerical solution to the space-time fractional diffusion equation and inversion for the space- dependent diffusion coefficient. *Journal of Computational and Theoretical Transport*, 2016.

[11] G.Li, W.Gu, and X.Jia. Numerical inversions for space-dependent diffusion coefficient in the time fractional diffusion equation. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 20 :339–366, 2012.

[12] Antil H., Otarola E., and Salgado A.J. Optimization with respect to order in a fractional diffusion model : analysis, approximation and algorithmic aspects. *J. Sci. Comput.*, 77(1) :204–224, 2018.

[13] Podlubny I. *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.

[14] Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M., and Yamazaki T. Uniqueness in an inverse problem for a onedimensional fractional diffusion equation. *Inverse Probl.*, 25 :115002, 2009.

[15] Y. Tang J. Huang and J. Yang L. VÂ´azquez and. Two finite difference schemes for time fractional diffusion-wave equation. *Numer Algor*, 2013.

[16] Sakamoto K. and Yamamoto M. Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 382(1) :426–447, 2011.

[17] Chen L., Nochetto R.H.and Otarola E., and Salgado A.J. Multilevel methods for nonuniformly elliptic operators and fractional diffusion. *Math. Comput.*, 85(302) :2583–2607, 2016.

[18] Sun L. and Wei T. Identification of the zeroth-order coefficient in a time fractional diffusion equation. *Appl. Numer. Math.*, 111 :160–180, 2017.

[19] D'Elia M. and Gunzburger M. The fractional laplacian operator on bounded domains as a special case of the nonlocal diffusion operator. *Comput. Math. Appl.*, 66(7) :1245–1260, 2013.

[20] Defterli O., D'Elia M.and Du Q., Gunzburger M., Lehoucq R., and Meerschaert M.M. Fractional diffusion on bounded domains. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 18(2) :342–360, 2015.

[21] Ciarlet P.G. *Introduction à L'analyse Numérique matricielle et à L'optimisation*. Université Pierre et Marie Curie, 1988.

[22] LeVeque R.J. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. University of Washington,Seattle, Washington, 2007.

[23] Samko S.G., A.A.Kilbas A.A., and Marichev O.I. *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[24] Wyss W. The fractional diffusion equation. *J. Math. Phys.*, 27(11) :2782–2785, 1986.

[25] Jiang Y.J. and Ma J.T. High-order finite element methods for time-fractional partial differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 235(11) :3285–3290, 2011.

ملخص: في هذه المذكرة ، قمنا بدراسة مسألة عكسية لتعيين معامل الانتشار المتعلق بمتغير الفضاء في معادلة الانتشار الكسرية لكابوتو. تم تقديم مخطط ضمني للمسألة المباشرة والذي يعتمد على تقطيع المشتق الجزئي لكابوتو. كما أثبتنا الاستقرار والتقارب لهذا المخطط الضمني باستخدام التحليل المصفوفي، وباستعمال طريقة طوماص قمنا بحساب الحل التقريبي للمسألة المباشرة من خلال مثال عددي. تم إدخال خوارزمية تعتمد على طريقة التربيعات المصغرة مع تنظيم تيخونوف لتحديد معامل الانتشار في فضاء تقريبي مختلف . أظهرت لنا هذه الخوارزمية أنها فعالة على الأقل في هذه المسألة العكسية عبر مثال عددي.

كلمات مفتاحية: التحليل المصفوفي، استقرار، تقارب، تربيعات مصغرة، طريقة طوماص ، مخطط ضمني، معادلة الانتشار الكسرية، معادلة ناظمية.

Dans ce mémoire, nous avons étudie un problème inverse pour déterminer numériquement un coefficient dépendant de l'espace dans une équation de diffusion-onde fractionnaire. Nous avons présenté un schéma de différence fini implicite pour le problème direct basé sur la discrétisation d'une équation intégro-différentielle équivalente et l'interpolation linéaire de Lagrange. Nous avons prouvé la stabilité et la convergence de ce schéma implicite à l'aide de l'analyse matricielle. Avec la méthode de Thomas, nous avons calculé la solution numérique de problème direct par un exemple numérique. Ensuite, nous avons proposé un algorithme d'inversion basé sur la méthode des moindres carrés avec régularisation d'Homotopie pour résoudre le problème inverse . Nous avons donné des exemples numériques pour montrer que l'algorithme d'inversion proposé est efficace et stable.

Mots-Clés : Équation de diffusion-onde fractionnaire, Équation intégro-différentielle, Interpolation linéaire de Lagrange, Moindres carrés, Régularisation d'Homotopie .

In this memoir, we studied an inverse problem to numerically determine a space-dependent coefficient in a fractional diffusion-wave equation. We presented an implicit finite difference scheme for the direct problem based on the discretization of an equivalent integro-differential equation and Lagrange linear interpolation. We proved the stability and convergence of this implicit scheme using matrix analysis. With Thomas's method, we calculated the numerical solution of direct problem by one numerical example. Then, we proposed an inversion algorithm based on the least squares method with the homotopy regularization to solve the inverse problem. We have given numerical examples to show that the proposed inversion algorithm is efficient and stable.

Keywords : Fractional diffusion-wave equation, Integro-differential equation, Linear interpolation of Lagrange, Least squares, Homotopy regularization .